

高雄市立高雄高商

數學科期末教學演示

教案設計

單元：面積與二階行列式

設計者：顏玟憶

指導老師：鄭英耀 教授

教學實習輔導教師：陳輝雄 老師

班導實習輔導教師：蘇婉菁 老師

行政實習輔導教師：廖俞雲 主任

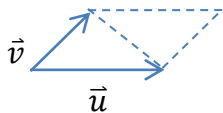
學習目標	基本行列式運算性質	教學時間	100 分鐘
教學班級	二年 17 班	班級人數	25 人
教材來源	1. 普通高級中學數學第三冊，許志農等，龍騰文化 2. SUPER 高中數學 3 課堂講義，許志農等，龍騰文化 3. 階段式教學講義·高中數學 3，黃天賜，翰林出版		
教學研究	一、教材研究 1. 說明行列式的定義 2. 說明行列式的計算方法 3. 講解行列式的運算性質 二、學生學習條件分析 1. 學生已具備基本代數四則運算的能力 2. 本班為綜合高中學術學程自然組學生，多能遵守教室常規，並對教師的提問予以回應。 三、教學聯繫 1. 開啟行列式計算的概念 2. 提醒學生做課前預習 3. 準備上課內容		
教學方法	講述問答法、實作演練		
教學資源	黑板、粉筆、課本講義		
教學目標	單元目標		行為目標
認知目標	1. 了解行列式的定義 2. 了解行列式的基本運算性質		1-1. 能描述行列式的形式 1-2. 能辨別行列式的行、列 2-1 能理解行列式的基本運算性質 2-2 會適時使用行列式基本運算性質
情意目標	3. 提高學生對行列式的學習動機		3-1 理解學習行列式的意義
技能目標	4. 學會運用行列式的運算性質		4-1 能對不同形式的行列式進行適當的化簡求值
教學過程	活動過程		教學方法 教具
	教師過程	學生活動	
	黑板 3-4 二階行列式	1. 專心聽講 2. 仔細抄筆記	黑板、粉筆、 口頭敘述

	$\begin{array}{cc} \left \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right \rightarrow \begin{array}{l} \text{第一列} \\ \text{第二列} \end{array} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{第} \quad \text{第} \\ \text{一} \quad \text{二} \\ \text{行} \quad \text{行} \end{array}$ <p>計算方式：</p> $\left \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right = ad - bc$ <p>口述</p> <ol style="list-style-type: none"> 二階行列式中，有 a、b、c、d，四個元素。 橫的為列，直的為行。上→下為第一列、第二列，左→右為第一行、第二行。 可以推廣至三階、四階...n階。裡面的元素有n^2個。 	<p>3. 實作練習： (課堂講義:p151)</p> <p><u>例題 1</u> 求二階行列式</p> $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ <p><u>演練 1</u> (學生練習)</p> <p>(階段式：p186)</p> <p><u>例題 1</u></p> <ol style="list-style-type: none"> $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 10 & -11 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$ 行列式展開並因式分解 $\begin{vmatrix} a & 1+a \\ 2-a & 2 \end{vmatrix}$ <p><u>練習 1</u> (學生練習)</p> <p>~歷屆考古題~(99 學測) (階段式：p199) 若a, b為整數且</p> $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4, \text{ 求 } a + b =$		
	<p>口述</p> <p>觀察階段式 p189 例題 5、練習 5 發現，行列式中的元素開始愈來愈複雜且不易展開計算，所以我們要介紹一些行列式的運算性質，使得能解決計算上的困難。</p> <p>黑板</p> <p>不易計算時，利用行列式的運算性質，化簡求值。</p> <ol style="list-style-type: none"> 行列全互換，其值不變(證明用) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$	<p>專心聽講</p> <ol style="list-style-type: none"> 專心聽講 仔細抄筆記 	<p>黑板、粉筆、 口頭敘述</p>	<p>40min</p>

	<p>2. 某兩行(列)互換，其值變號</p> $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ <p>3. 某一行(列)全為 0，其值為 0</p> $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ <p>4. 某兩行(列)成比例，其值為 0</p> $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0$ <p>5. 某一行(列)有公因數，可提出</p> $\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ <p>6. 至少保留一行(列)乘一非零常數 k，加到另一行(列)，其值不變(如何求 k? → 產生愈多 0、±1、公因數愈多愈好)</p> <p>7. 若有 $n - 1$ 行(列)完全相同，則可將不同的那行(列)，直接拆項加減 (行列式不可直接做乘除)</p> $\begin{vmatrix} a & b \\ m+c & n+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	<p>3. 實作練習： (課本 p211)</p> <p>下列何者正確：</p> <p>(1) $\begin{vmatrix} 23 & 45 \\ 67 & 89 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 67 \\ 45 & 89 \end{vmatrix}$</p> <p>(2) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$</p> <p>(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = 0$</p> <p>(4) $\begin{vmatrix} 3a & 5a \\ 3c & 5c \end{vmatrix} = 0$</p> <p>(5) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+10b & b \\ c+10d & d \end{vmatrix}$</p>		<p>3min</p>
--	--	---	--	-------------

	<p>口述 觀查行列式有什麼是我們可以拿來化簡的 (常用性質 4、5、6)</p> <p>黑板 $\begin{vmatrix} 26 & 39 \\ 35 & 53 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 35 & 53 \end{vmatrix}$</p> <p>口述 觀查題目有幾個未知數和幾個已知條件，此題有 4 個未知數卻只有 1 個已知條件，所以只能關係求值</p> <p>黑板 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2,$ $\begin{vmatrix} 2a + 5b & 3a - 4b \\ 2c + 5d & 3c - 4d \end{vmatrix}$ $= \frac{23}{4} \begin{vmatrix} a & 3a - 4b \\ c & 3c - 4d \end{vmatrix}$ $= -23 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -46$</p> <p>口述 要小心化簡到最後的 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，裡面的元素位置是否和已知條件相同，若不同，要化簡成相同的！</p>	<p>實作練習 (課堂講義：p155)</p> <p>例題 6 求二階行列式 $\begin{vmatrix} 26 & 39 \\ 35 & 53 \end{vmatrix}$</p> <p>演練 6 (學生練習)</p> <p>例題 7 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$，求 $\begin{vmatrix} 2a + 5b & 3a - 4b \\ 2c + 5d & 3c - 4d \end{vmatrix}$</p> <p>演練 7 (學生練習) (課本：p207)</p> <p>例題 3 $\begin{vmatrix} 33 & 44 \\ 45 & 61 \end{vmatrix}$</p> <p>隨堂練習(學生練習)</p> <p>例題 4 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$，求 $\begin{vmatrix} 2a + 3b & 4a - 5b \\ 2c + 3d & 4c - 5d \end{vmatrix}$</p> <p>隨堂練習(學生練習) (階段式：p189)</p> <p>例題 5 (1) $\begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 12 & 132 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 100 & 101 \\ 2011 & 2012 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} - \sqrt{2} & \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{3} + \sqrt{2} & -\sqrt{3} + \sqrt{2} \end{vmatrix}$</p> <p>練習 5 (學生練習)</p> <p>例題 6 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$，$\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = -3$求 $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c + 3e & d + 3f \end{vmatrix}$</p> <p>練習 6 (學生練習)</p>	<p>47min</p>
<p>回家作業</p>	<p>課堂講義 p158 1~4、階段式 p193 2~3</p>		

學習目標	行列式的應用	教學時間	100 分鐘
教學班級	二年 17 班	班級人數	25 人
教材來源	1. 普通高級中學數學第三冊，許志農等，龍騰文化 2. SUPER 高中數學 3 課堂講義，許志農等，龍騰文化 3. 階段式教學講義·高中數學 3，黃天賜，翰林出版		
教學研究	一、教材研究 1. 說明行列式在面積上的應用 2. 說明行列式在二元一次聯立方程組的應用及往後多元的推廣及差異性 二、學生學習條件分析 1. 學生已具備基本行列式運算的能力 2. 能適當的運用行列式基本運算性質 3. 已會使用向量代數坐標化類型的面積求值 4. 已會判別二元一次聯立方程組解的行為 5. 本班為綜合高中學術學程自然組學生，多能遵守教室常規，並對教師的提問予以回應。 三、教學聯繫 1. 與已知向量求面積做推導 2. 與 2-1 直線方程式及其圖形做連結 3. 提醒學生做課前預習與複習 4. 準備上課內容		
教學方法	講述問答法、實作演練		
教學資源	黑板、粉筆、課本講義		
教學目標	單元目標	行為目標	
認知目標	1. 了解行列式在計算面積的應用 2. 了解行列式在二元一次聯立方程組的應用及往後多元的推廣。(克拉瑪公式)	1-1. 能理解運用行列式求已知向量代數坐標化圖形面積的好處 1-2. 能辨別由何種方式找面積較佳 2-1 能理解使用克拉瑪公鄉判別二元一次聯立方程組的解行為	
情意目標	3. 提高學生應用行列式的能力	3-1 理解學習行列式應用的意義	

技能目標	<p>4. 學會運用行列式求面積</p> <p>5. 學會運用行列式判別二元一次聯立方程組的解行為與應用克拉瑪公式</p>	<p>4-1 會判別由已知條件，使用適當的求面積方法</p> <p>5-1 學會使用克拉瑪公式，討論二元一次聯立方程組的解行為</p> <p>5-2 學會使用克拉瑪公式找相容方程組的解</p>		
教學過程	活動過程		教學方法	時間分配
	教師過程	學生活動	教具	
	<p>上週回家作業檢討</p> <p>黑板</p> <p>二階行列式的應用</p> <p>1. 用在面積求值</p> <p>已知兩不平行且共始點的向量 \vec{u}、\vec{v}，其所張成的平行四邊形面積</p> $= \sqrt{ \vec{u} ^2 \vec{v} ^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$ <p>三角形面積</p> $= \frac{1}{2} \sqrt{ \vec{u} ^2 \vec{v} ^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$  <p>若已知向量皆代數坐標化 $\vec{u} = (x_1, y_1)$，$\vec{v} = (x_2, y_2)$ 則所張的平行四邊形面積</p> $= \sqrt{ \vec{u} ^2 \vec{v} ^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$	<p>1. 學生提問</p> <p>2. 專心聽講</p> <p>3. 仔細抄筆記</p> <p>4. 實作練習： (課堂講義:p157)</p> <p><u>例題 1</u> 求 $\vec{u} = (-5, 1)$，$\vec{v} = (2, 3)$ 所張成的平行四邊形面積</p> <p><u>演練 1</u> (學生練習)</p> <p><u>例題 2</u> 求 $\triangle ABC$，$A(-2, 1)$, $B(3, 2)$, $C(-1, -2)$，求 $\triangle ABC$ 面積</p> <p><u>演練 2</u> (學生練習)</p>	<p>黑板、粉筆、口頭敘述</p>	<p>12 min</p> <p>20 min</p>

$= \sqrt{\frac{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2}{(x_1x_2 + y_1y_2)^2}}$ $= \sqrt{x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2}$ $= \sqrt{(x_1y_2 - y_1x_2)^2}$ $= \left \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right $ <p>三角形面積 $\frac{1}{2} \left \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right$</p>			
<p>口述 已知條件，皆較適合使用以前的求面積公式</p> <p>黑板 $\square = \sqrt{3^2 \times 5^2 - 7^2} = 4\sqrt{11}$ $\Delta = 2\sqrt{11}$</p> <p>口述 記得，要使用行列式求面積，一定要共始點！</p> <p>黑板 $\overline{AB} = (2,6), \overline{AC} = (-3,3)$ $\square = \left \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \right = 24, \Delta = 12$</p> <p>口述 此題的 r, s 相當於我們熟悉的 x, y</p> <p>黑板 $\overline{AB} = (-4, -2), \overline{AC} = (-2, 1)$ $\square = \left \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right = 8$ 8 個 $\square = 64$</p>	<p>(階段式：p186) <u>例題 2</u> 已知 $\vec{a} = 3, \vec{b} = 5, \vec{a} \cdot \vec{b} = 7$ 求 \vec{a}, \vec{b} 所夾的 Δ 面積及 \vec{a}, \vec{b} 為相鄰兩邊的 \square 面積 <u>練習 2</u> (學生練習) <u>例題 3</u> (p187) $\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (-2, 6)$, 求 \vec{a}, \vec{b} 所夾的 Δ 面積及 \vec{a}, \vec{b} 為相鄰兩邊的 \square 面積 <u>練習 3</u> (學生練習) \square ABCD, A(1, 2), B(3, 8), C(-2, 5), D, 求 Δ 面積和 \square 面積 <u>例題 4</u> (p188) $\overline{AP} = r\overline{AB} + s\overline{AC}$, $0 \leq r \leq 2, -1 \leq s \leq 3$ A(3, 2), B(-1, 0), C(1, 3) 求(1)以 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 所張成的 \square (2) P 形成之面積 <u>練習 4</u> (學生練習)</p>	<p>黑板、粉筆、口頭敘述</p>	<p>15 min</p>

<p>已知 \vec{u}, \vec{v} 所張成的 \square 面積為 A，則 $p\vec{u} + q\vec{v}, k\vec{u} - l\vec{v}$ 所張成的 \square 面積為 $\left \begin{vmatrix} p & k \\ q & -l \end{vmatrix} \right A$</p>	<p>1. 專心抄筆記 2. 實作練習：</p> <p><u>例題</u>：由 \vec{a}, \vec{b} 所決定的平行四邊形面積為 10，求由 $2\vec{a} - \vec{b}$ 和 $2\vec{b}$ 所決定的 \square 面積 _____</p> <p><u>練習</u>：由 \vec{a}, \vec{b} 所決定的平行四邊形面積為 6，求</p> <p>(1) $\vec{a} + \vec{b}$ 和 $3\vec{a} - 2\vec{b}$ 所決定的 \square 面積 _____ (用圖形)</p> <p>(2) $\vec{a} + \vec{b}$ 和 $3\vec{a} - 2\vec{b}$ 所張出的平行四邊形面積 _____ (圖形和公式比較)</p>		3min
--	--	--	------

黑板

二階行列式的應用

2. 用在解聯立方程組上

$$\begin{aligned} L_1 &\rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases} \\ L_2 &\rightarrow \end{aligned}$$

名稱	幾何	代數 (係數比例法)	代數 (克拉瑪公式)
相容 方程組 (恰有一解)	交於 1 點	$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (斜率不相等)	$\Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ 其解為 $(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta})$
矛盾 方程組 (無解)	平行	$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ 斜率成比例且與常數項不成比例	$\Leftrightarrow \Delta = 0$ 且 Δ_x, Δ_y 至少有一個不為 0 ($\Delta_x^2 + \Delta_y^2 \neq 0$)
相依 方程組 (無限多解)	重合	$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	$\Leftrightarrow \Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$

1. 專心聽講
2. 仔細抄筆記
3. 實作練習
(課堂講義：p152)

例題 2

$$\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

演練 2

(學生練習)

例題 3

已知 $\vec{a} =$

$(-4, 3)$ 與

$\vec{b} = (6, t)$ 平行，

求實數 t 的值

演練 3

(學生練習)

黑板、粉筆、口頭敘述

10 min 複習使用係數比例法解題

	<p>消 y 解 x :</p> $(1) \times b_2 - (2) \times b_1 \iff (a_1 b_2 - a_2 b_1)x = c_1 b_2 - b_1 c_2$ $\begin{cases} a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \equiv \Delta \neq 0 & \rightarrow \text{恰有一解} \\ \Delta = 0 \begin{cases} \Delta_x = 0 = \Delta_y & \rightarrow \text{重合} \\ \Delta_x \neq 0 \text{ (or } \Delta_y \neq 0) & \rightarrow \text{平行} \end{cases} \end{cases}$ <p>Note: 克拉瑪公式</p> <p>(1) 可推廣至 \mathbb{R}^3、\mathbb{R}^4、...、\mathbb{R}^n，但其邏輯概念，只有恰有一解仍然保持不變(充要條件)，其他無解、無限多解並非充要條件。</p> <p>(2) 找(未知係數)恰交一點的解</p>	<p><u>例題 4</u> 就實數 k 討論</p> $\begin{cases} (k+3)x + 4y = 5 - 3k \\ 2x + (k+5)y = 8 \end{cases}$ <p>的解</p> <p><u>演練 4</u> (學生練習)</p> <p><u>例題 5</u> 設</p> $\begin{cases} (1+k)x - 2y = 0 \\ 2x + (2+k)y = 0 \end{cases}$ <p>除了 $x = 0, y = 0$ 之外，還有其他的解，求 k 的值</p> <p><u>演練 5</u> (學生練習)</p> <p><u>例題 8</u> 已知</p> $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ <p>的解為</p> $x = 4, y = 2$ <p>求</p> $\begin{cases} 2b_1 + (2a_1 - b_1)y + 3c_1 = 0 \\ 2b_2 + (2a_2 - b_2)y + 3c_2 = 0 \end{cases}$ <p>的解</p> <p><u>演練 8</u> (學生練習)</p>		<p>35 min</p> <p>使用克拉瑪公式解題</p>
<p>回家作業</p>	<p>口述</p> <p>行列式的小故事</p>	<p>(階段式： p190~p192)</p>	<p>投影片</p>	<p>5min</p>