2013 台南市第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

科（類）別：數學

組別：高中組

作品名稱：Nash的棋蹟

學校：台南市興國高級中學

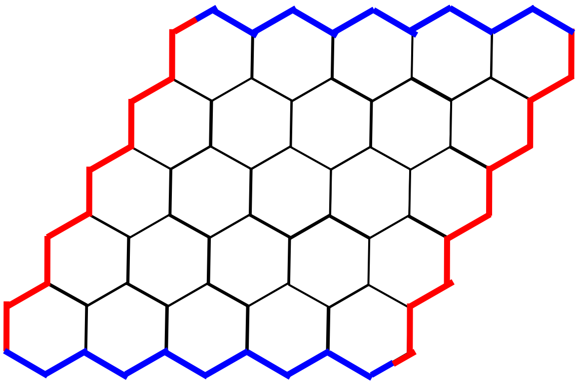
作者：陳品勳、李宜庭、莊喬媛

指導老師：顏玟檍 老師、林宜嬪 老師

目錄

壹、 摘要

在「奈許棋」的遊戲規則(註)下，我們希望能討論出一般正統的類平行四邊形棋盤，零和的情形以及必勝的策略。



註:「奈許棋」是由美國數學家 John Nash 在普林斯頓大學唸研究所時發明的一種遊戲，這是一種沒有和局的對奕遊戲，甚至可以說先下的一方，幾乎是勝券在握！

遊戲規則是：棋盤如上方附圖，有上下同色、左右同色之分，雙方各持自己顏色的棋子，輪流下一次一顆棋，看哪一方先連通自己的顏色(即紅方先由左至右或藍方先由上至下)，則為贏家！

貳、 研究動機

我們，是三個從不同環境升上高中的同學，在高中也不同班，但都是因為學校寒假的各科活化課程安排，而接觸到一些有關數學家的研究，以及許多從數學定理中衍伸出來的有趣遊戲，因為我們對於下棋有著極濃厚的興趣，所以聽著老師介紹「奈許棋」的玩法時，就被這遊戲規則給吸引住了，又因為它被 John Nash 證明出無和局，更覺得有意思，而且，一開始都下不太贏，所以引起了我們的好奇心，進而展開了以下一連串的對奕棋步討論與研究。

參、 研究目的

其實，一開始真的只是單純的想要贏電腦，所以，就一頭栽進奈許棋的世界，在這個過程，我們希望能先解決“奈許棋局是沒有和局的”這個特別條件，然後再想，是否能將這種特殊的棋局，找出一定能贏棋的規則(針對先下的一方)，進而看是否有什麼不同的火花出來。

肆、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、網路、超級金頭腦、word

伍、 研究過程及方法

在一開始接觸這個遊戲的時候，我們就曉得奈許在發明棋後，也同時給了兩件大事情：
(1) 奈許棋是一種沒有和局的棋局
(2) 在奈許棋的遊戲規則下，先下的一方(紅色)，若沒有下錯任何一步，保證獲勝

但是，似乎沒有給出很棒的方法和證明，所以，我們想要試著將這兩件大事情詳細說明。但在說明之前，必須先介紹兩個有關固定點定理的引理。

引理一：第一組合引理(First Combinatorial Lemma)
(Sperner's Lemma for closed interval)

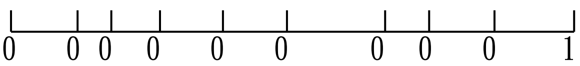
假設在一個封閉區間裡，細分有限個間隔點，在原封閉區間的左端點標示 0、右端點標示 1，而裡面的每個間隔點皆任意的標上 0 或 1，則在這個封閉區間裡必定有一個小區間的兩端點標示為相異的數(即兩端點分別為 0、1)。而且，這種區間存在奇數個。

[證明]

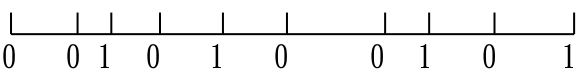
在一個封閉區間裡，給定有限個間隔點，則會形成很多個子區間，如果子區間端點的標記不同，則我們稱之為“可接受的子區間(acceptable subinterval)”。那這只有兩種可能，一種情形是所有的內部點都被標記為 0(如圖一(a))，或者它們之中至少一個被標記為 1(如圖一(b))，在這兩種情況下，至少有一個“可接受的子區間”是顯而易見的。

再來，讓我們證明“可接受的子區間”數量一定是奇數個。我們開始沿著原來的區間從左至右數著“可接受的子區間”，每個第奇數個“可接受的子區間”，其左端點被標記為 0 而其右端點被標記為 1，而第偶數個 “可接受的子區間”被標記的方式則相反。因為最後一個“可以接受的子區間”右端點被標記為 1，因此“可以接受”的區間數是奇數。

這裡其實我們可以再補充說明的更詳細一些：令這些“可接受的子區間”分成形式如(0,1)，也就是說左端點為 0 且右端點為 1，和另一種形式如(1,0)。而(0,1)這種形式的子區間，一定會比(1,0)這種形式的子區間多一個！(因為最右邊的一定是形式如(0,1))也就是說，一定會有奇數個“可接受的子區間”。



圖一(a)



圖一(b)

接下來，我們要制定一個引理，其敘述中會用到“門(doors)、房間(rooms)、家(house)”(如圖二)。假設每個房間的門數只會有一個或兩個或者沒有門，若房間只有一個門，則我們叫做“死角(dead ends)”；若房間有兩個門，則我們叫做“連運室(communicating room)”；門可以分成“外面的門(outside door)”和裡面的門兩種，前者是門和最外面連結，後者則是連接內部相鄰的兩個房間，所以，我們可以很直接的說，沒有房間會有超過一個外面的門，而且，也不會有兩相鄰的房間會有超過一個共用門。

引理二：假設任一個在家裡的房間都有 1 個或 2 個門或者是沒有門。則死角的個數和外面門的個數會是有相同的奇偶性。

[證明]

為了證明，我們來描述家裡通過所有房間路徑。每條路徑都要符合以下的規則：

(1) 每個門都只能通過一次

(2) 每個路徑若不是從連接街道上的門開始，就是從死角開始

路徑會藉由連通室一直延續下去，但，也會終止於以下兩種情形：

(1) 路徑跑到外面

(2) 跑到死角

假設每個房間的門數可唯一決定路徑，而進入一個雙門的房間，就只有一條路可以出來。當一條路徑完成後，我們再開始另一個，依照相同的方式，一再重覆同樣的方法找路徑，直到不再有外面的門或者死角可以當起始點。

經過這樣之後，我們可以歸納出路徑只有三種形式：

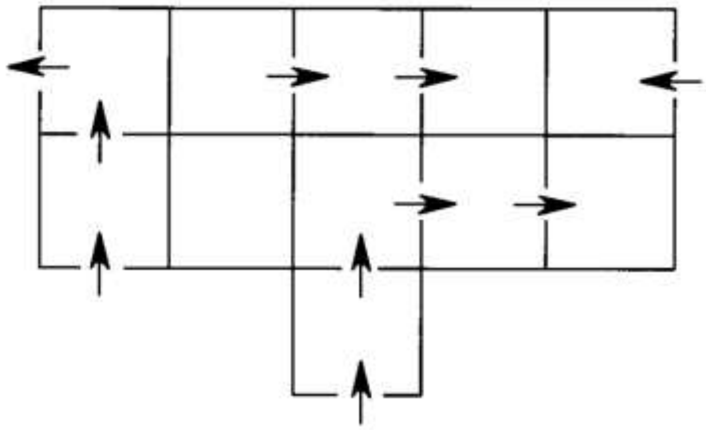
(1) 從外面的門開始走到死角(或者是反過來，這對我們來說沒什麼不一樣)

(2) 從外面的門開始走到另一個外面的門

(3) 從死角走到死角

我們令第一種情形的路徑數為 m、第二種情形的路徑數為 n、第三種情形的路徑則為 p。

因為每一個形式(1)和一個外面的門是有關的，而形式(2)則和兩個外面的門有關，所以，所有外面的門數為 $m+2n$。相同的方法，死角個數為 $m+2p$。觀察一下，$m+2n$ 和 $m+2p$ 有相同的奇偶性的，即得證！

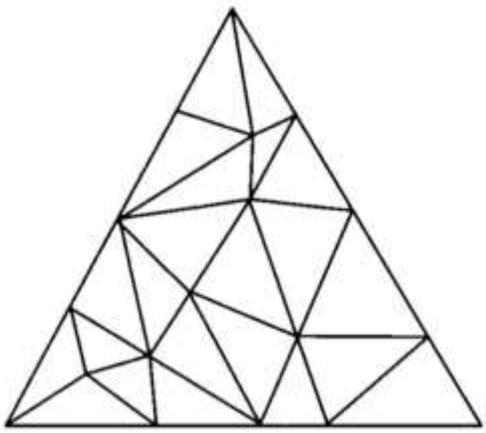


圖二

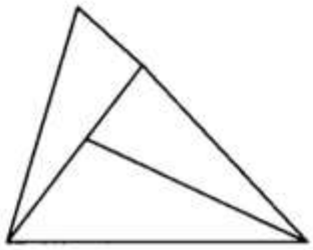
剛證明了引理二，但，我們說的“房間”並沒有很完整的說明房間的形狀，所以接下來，我們將房間考慮成一個比較具體的形狀，例如：三角形。

以下要證明的是，我們將一個三角形“三角剖分(triangulation)”成更小的三角形。所謂三角剖分必須滿足以下條件：任何一對較小的三角形，不是沒有共點，就是具有共同的頂點，或者有共同的邊。只要滿足這種細分的即稱為三角剖分，而經過三角剖分的小三角形，我們稱之為面(faces)，而其側邊稱之為邊(edges)，其頂點仍稱做頂點(vertices)。

例如：我們稱圖三(*a*)為一個三角剖分，而圖三(*b*)則不是。



圖三(*a*)



圖三(*b*)

引理三：Sperner 引理 (Sperner's Lemma)

考慮一個可被三角剖分的三角形 T，將此三角形 T 的三個頂點各標記上 1、2、3，而被三角剖分的小三角形頂點也給上一樣數字的標記，標記方式需滿足以下條件：若這個頂點是在 T 的邊上，則這個頂點只能標記在 T 這個邊上的兩個數字其中一個，則必存在一個面，其三個頂點的標記是不同的(也就是 1，2，3)，而且，這種面有奇數個。

[證明]

令三角形 T 為一個“家(house)”而且每個面為一個“房間(room)”，若三角剖分的邊上端點被標記為 1 和 2，則稱為“門(door)”，我們可以說是形如(1,2)的即為之。(注意：和引理 1 不一樣的地方在於，我們在這裡不區分(1,2)和(2,1)的不同) 那麼，哪個面會變成“死角(dead ends)”？

考慮所有可能分配標記為 1、2、3 的面，共用十種不同的形式：(1,1,1)、(1,1,2)、(1,1,3)、(1,2,2)、(1,2,3)、(1,3,3)、(2,2,2)、(2,2,3)、(2,3,3)、(3,3,3)。我們可以觀察到，形如(1,2,3)這種面只有一個邊為(1,2)，所以，這十分自然的就形成了一個死角；而形如(1,1,2)和(1,2,2)這種，我們稱為“連通室(communicating rooms)”，因為它很明顯的有兩個邊為(1,2)。

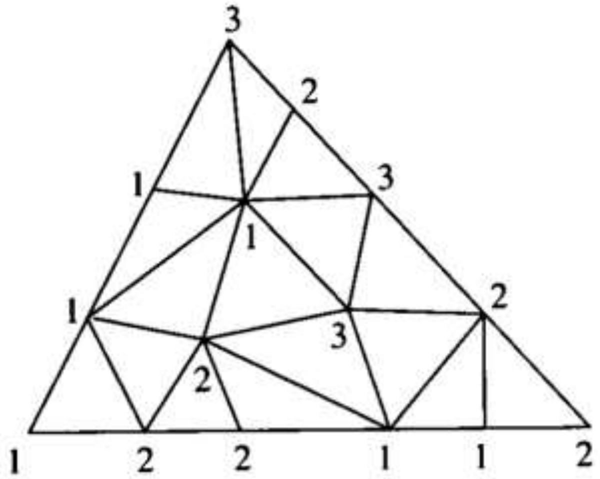
以下，我們用引理二來定義一個詞彙對照表：

三角形 T	家(house)
三角剖分的面	房間(room)
三角剖分的邊，形如(1,2)的	門(door)
三角形 T 的邊界	外面的門(outside door)
形如(1,2,3)的面	死角(dead ends)
形如(1,1,2) 或 (1,2,2)	連通室(communicating room)

很明顯的，我們無論選擇哪一個三角剖分，依照這個表，我們可以得到：所選的面一定是有一個或兩個形如(1,2)的邊，又或者，完全沒有，這符合我們的引理二，因此，死角和外面的門皆為偶數個或者皆為奇數個。

現在，我們再轉換回這個引理的語言，我們知道， (1,2,3)這種面和(1,2)這種邊是有相同奇偶性的，而形如(1,2)的邊界邊又只能依附在 T 的端點被標記為 1、2 的邊上，又沒有其他形如這種的邊會在 T 的其他邊界上，所以，利用引理一，即得證。

圖四，是一個說明引理二的圖示。



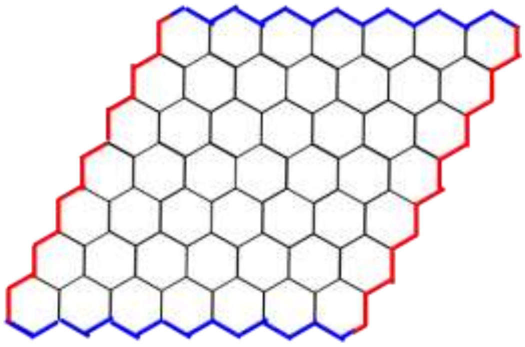
圖四

再來，我們要證明：

奈許棋是一種沒有和局的棋局

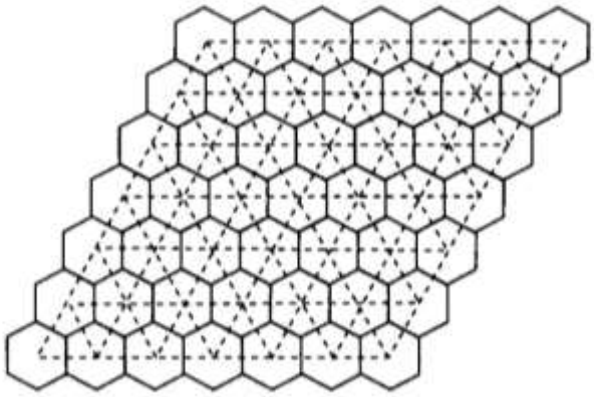
[證明]

這個證明，是利用“行走路徑”來思考。假設整個棋盤最外面的邊界都被紅、藍兩方佔滿了，而佔領的方式是：上、下兩方皆為藍色，左、右兩方皆為紅色，而四個角落的地方，不是紅色就是藍色。(如圖五(a))



圖五(a)

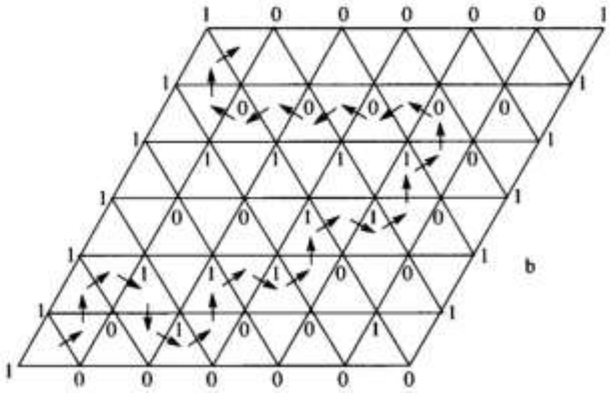
而我們將這種圖，利用數學上圖論的技巧，將其轉換成只剩點與邊的關係來觀察。整個棋盤就變成很多個“對偶”的雙反三角形相疊(如圖五(b))



圖五(b)

可以很清楚的看到，每個六角形，皆對應到唯一的一個三角剖分後的頂點。若該六角形為紅色一方所佔領，則對應的頂點就標記 1，反之，若為藍色一方佔領，則對應標記就為 0；若三角剖分的邊為標記不同號碼的邊，我們稱之為門。這個圖，其實很好看出：沒有面是死角的。

這個路線就如圖五(c)標示的，有一條路已經由下面連到上面了，所以這是藍方獲勝！



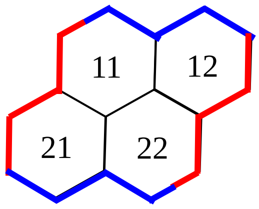
圖五(c)

接著，我們要來呈現奈許棋的破解版：先下的一方必勝策略。

在奈許棋的遊戲規則下，先下的一方(紅色)，若沒有下錯任何一步，保證獲勝

首先，我們先介紹最簡單的情形：

2×2



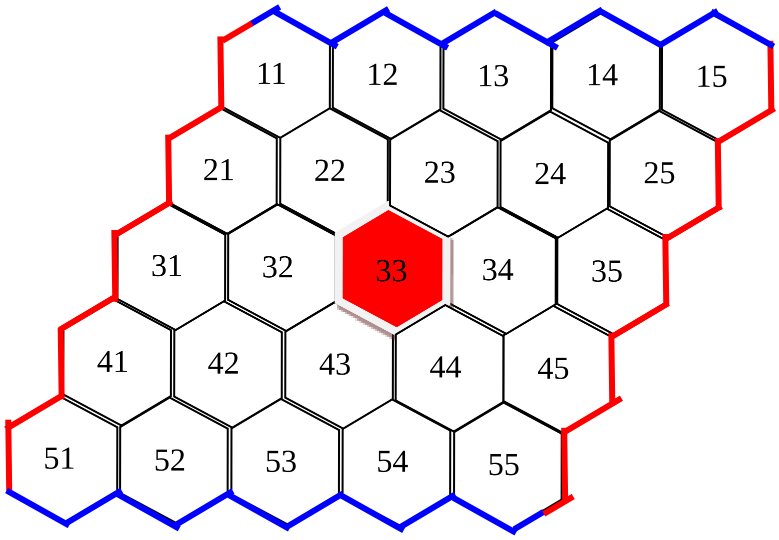
這種情形，是最簡單的棋盤，也是很容易能看出，先下的一方，必贏！
贏的路徑共有 3 條。(11-22，11-12，12-22)

奇數奈許棋盤的必勝策略（以 5×5 為例子說明）：

先把棋盤分為四等分(如圖六，類似象限的感覺，也就是將 11 連線至 55，15 連線至 51)，分成上方（12、13、14、23)、下方（43、52、53、54)、左方（21、31、32、41)、右方（25、34、35、45)、線一（11、22、44、55)、線二（51、42、24、15)、中間（33）等六個區域。當紅方第一步下在正中間時(33)，且藍方下在上、下兩個方時並不會影響中間到左、右兩方，所以當紅方第一步下在中間時，只需理會藍方下在左、右兩方的時候，又當紅方下在中間時，走線一可以最快到達右、左方，最短步數為 2，

所以當藍方下在右、左方，但距離中心紅方超過 2 的時候便以中間為基準點考慮那個棋子的方位(ex：左上或右下） 下在適合的位子(ex：藍如果下在左上，我們便下在相鄰正「左」)。但當藍下在右、左方且距離中間小於 2 時候，我們便以那點與某點建構出一個「小型的納許棋盤」，並只需考慮那「小型的納許棋盤」如何贏得勝利即可。

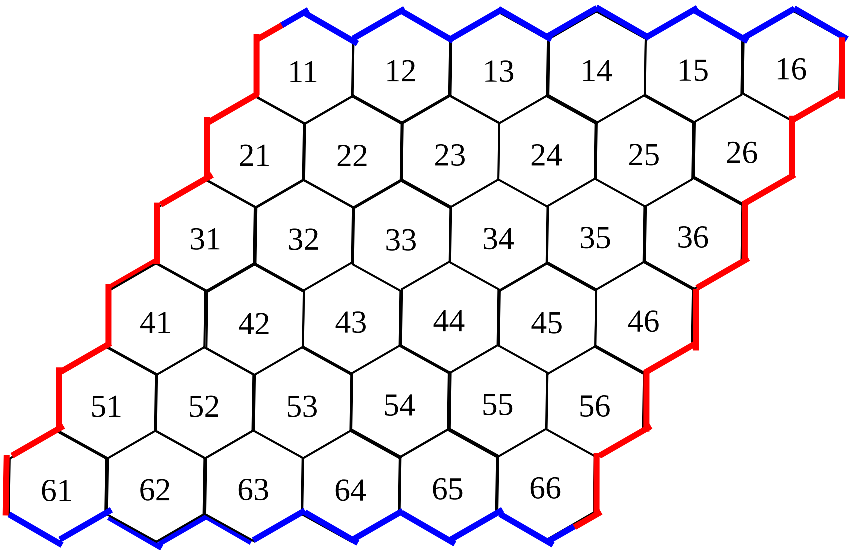
圖六



偶數奈許棋盤的必勝策略（以 6x6 為例子說明）：

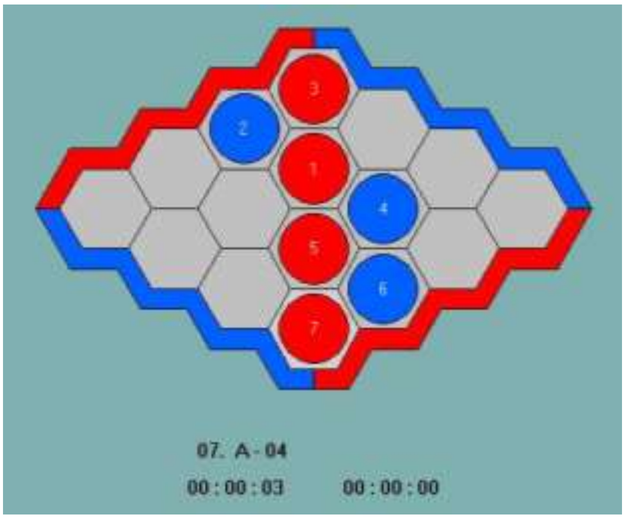
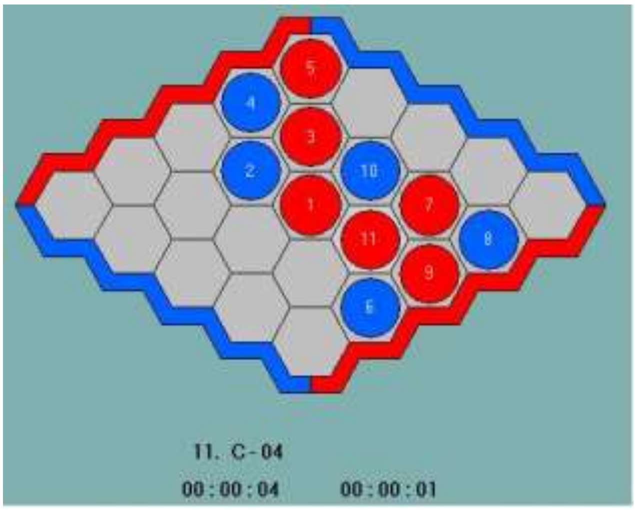
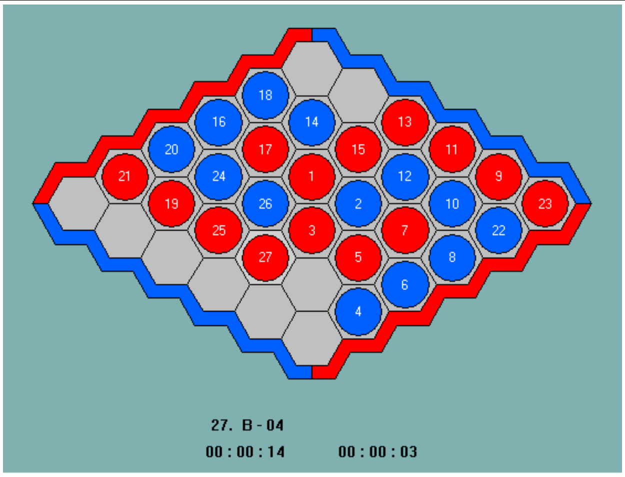
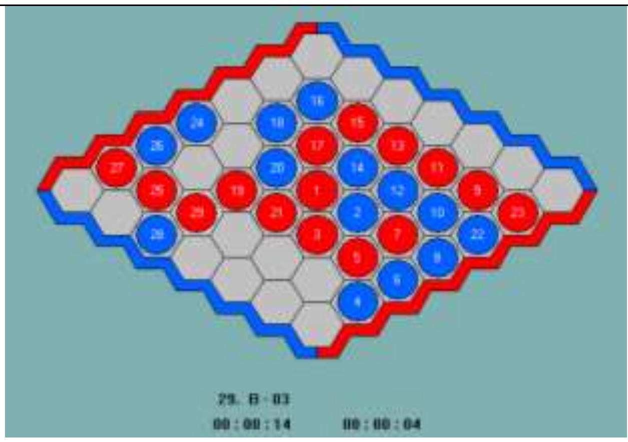
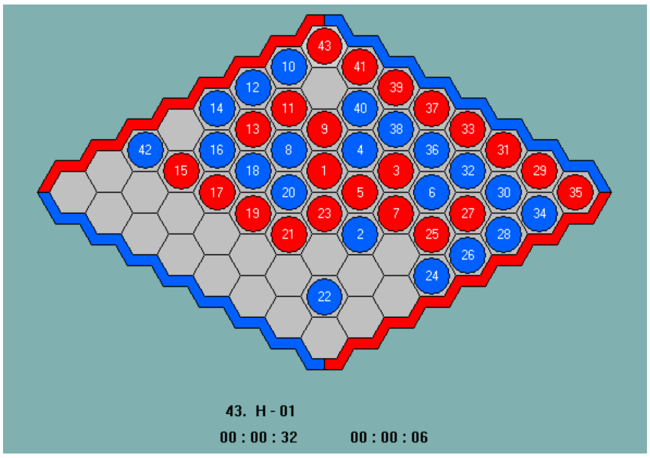
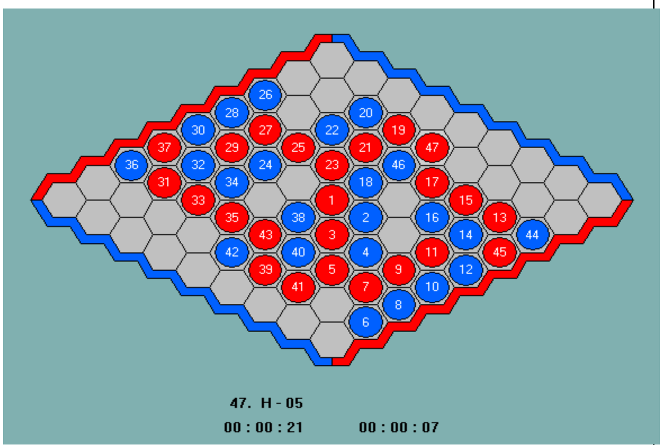
先把棋盤分為四等分(如圖七，類似象限的感覺，也就是將 11 連線至 66，16 連線至 61)，分成上方（12、13、14、15、23、24）、下方（62、63、64、65、53、54）、左方（21、31、41、51、32、42）、右方（26、36、46、56、35、45）、線一（11、22、55、66、）、線二（61、52、43、34、25、16）、中間（33、44）等六個區域。當紅方第一步下在正中間時（33、44），且藍方下在上、下兩個方時並不會影響中間到左、右兩方，所以當紅方第一步下在中間時，只需理會藍方下在左、右兩方的時候，又當紅方下在中間時，走線一可以最快到達右、左方，最短步數為 3，

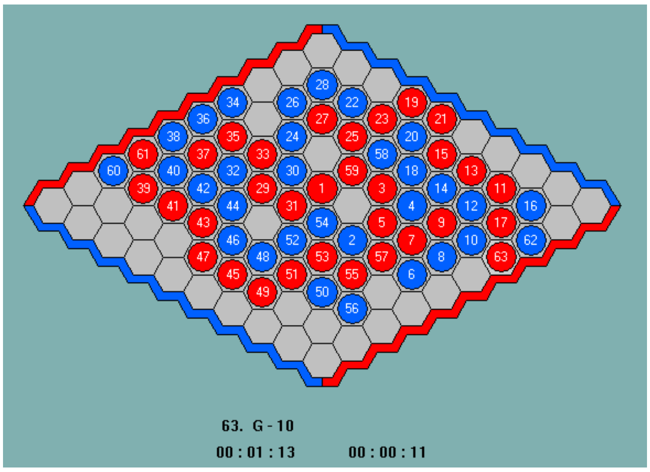
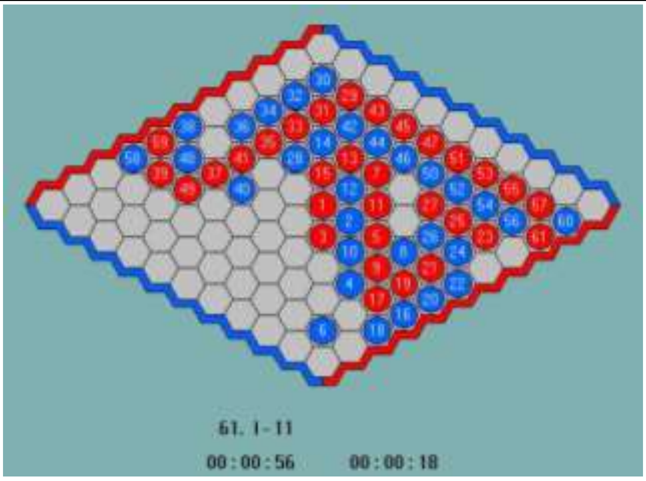
所以當藍方下在右、左方，但距離中心紅方超過 3 的時候便以中間為基準點考慮那個棋子的方位(ex：左上或右下) 下在適合的位子(ex：藍如果下在左上，我們便下在相鄰正「左」)。但當藍下在右、左方且距離中間小於 3 時候，我們便以那點與某點建構出一個「小型的納許棋盤」，並只需考慮那「小型的納許棋盤」如何贏得勝利即可。



圖七

陸、 實驗結果(與電腦對戰)

	
4x4—7 步	5x5—11 步
	
6x6—27 步	7x7—29 步
	
8x8—43 步	9x9—47 步

	
10×10—63 步	11×11—61 步

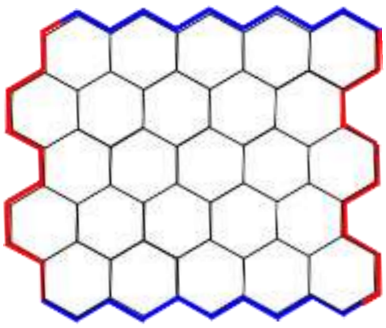
我們從一開始接觸奈許棋時，都不能贏電腦，到現在終於能每種大小的棋盤都下贏了！

柒、 結論

對奕時，下棋者的心理，可依照經濟人理論，也就是人是自利的，下棋都只為了自己的勝利著想，而下棋者希望贏得更漂亮，所以會去猜測對方的棋步，也會期望對方所下的棋步和自己預想的相同，使得自己每一步下得有意義；在雙方實力相當的前提而且雙方皆無失誤，我們運用了離散數學的方法來證明奈許棋是不會和局的。

捌、 未來展望

1. 奈許棋盤若改成像是“交錯排列”(如圖八)或者“立體呈現”(像一顆足球)，是否有相同的性質：零和、先下者不失誤必勝！



圖八

2. 希望可以利用電腦程式，模擬出所有路徑。我們的想法是：依然用 0、1 表示紅、藍兩方，且 0、1 個數皆佔總棋盤格數的一半，再加入隨機的概念，寫程式將 0、1 佈滿整個棋盤，其結果是否會為所有贏棋的路徑情形？

玖、 參考資料

[1] Yu. A. Shashkin, Fixed Points, American Mathematical Society、Mathematical Association of America, 1991。

[2] 許志農,算術講義, Dec 26,2004。

[3] Vadim Anshelevich, Hexy Wins Hex Tournament, 2000。

[4] 廖子樂、林佳豪、蘇薇方、張霈宜、張皓鈞等, Hex 遊戲王, 中華民國第 51 屆中小學科學展覽。

[5] http://www.mathland.idv.tw/fun/nashgame.htm 納許棋的介紹。

[6] http://vanshel.com/Hexy/ 納許棋遊戲下載。