

【分數的概念】

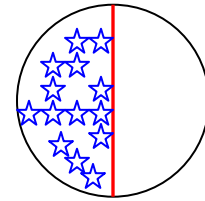
妳一定看過接下來的這些數字，例如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{6}{8}$ 、 $\frac{5}{9}$ 等數字，牠們都被稱為分數，這就是分數最基本的樣子。

分析分數： $\frac{1}{2}$

↑ 叫做**分子**，代表佔其中幾等份

↓ 叫做**分母**，說明總共分成幾等份

說明分數： $\frac{1}{2}$ 這個分數，用右邊的圓形來表示，它的意思是把一個圓分成兩等份，而拿其中一等份，我們就稱這為 $\frac{1}{2}$ 。



舉例：

1. 小明拿到 $\frac{3}{4}$ 塊的披薩，那他拿到多少披薩呢？利用圖形來說明它，從中瞭解分數的意思。

一塊完整的披薩

將這塊披薩切成 4 等份

小明拿其中的 3 等份，所以他拿了 $\frac{3}{4}$ 塊的披薩

2. 大哲拿到 $\frac{4}{8}$ 張的紙，那他拿到的多大的紙呢？利用圖形來說明，就簡單多了。

一張完整的紙張

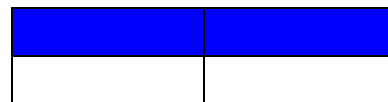
將這張紙切成 8 等份

將這張紙切成 8 等份，取其中的 4 等份，這就是 $\frac{4}{8}$ 張大小的紙

動動腦：



$$\frac{4}{8}$$



$$\frac{2}{4}$$

左邊這兩個分數一樣大嗎？

【分數的長相】

一、真分數

妳只要看到分數長這樣的，牠們就是真分數了，那妳發現什麼呢？

$$\frac{1}{2}、\frac{2}{3}、\frac{3}{5}、\frac{6}{8}、\frac{20}{21}、\frac{11}{30}、\frac{15}{25}、\frac{6}{12}、\frac{18}{27}$$

妳是否發現到，牠們的分子數字都比分母的數字小呢，這就是真分數。

二、假分數

妳如果看到分數的模樣是以下的樣子，牠們就是假分數了，妳發現什麼呢？

$$\frac{3}{2}、\frac{5}{3}、\frac{8}{5}、\frac{10}{8}、\frac{40}{21}、\frac{42}{30}、\frac{30}{25}、\frac{23}{12}、\frac{39}{27}$$

妳是否發現到，牠們的分子數字都比分母的數字大呢，這就是假分數。

三、帶分數

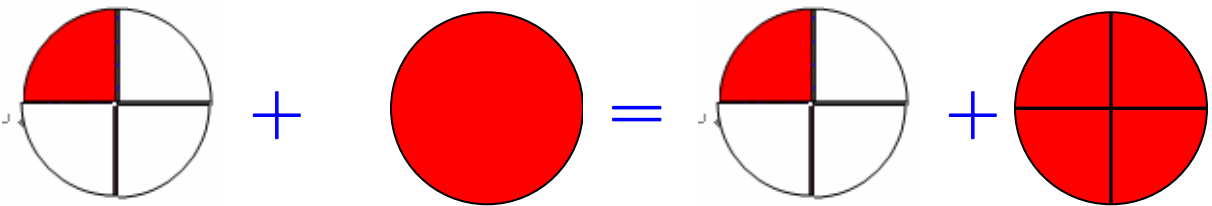
妳也可能看到另一種分數的長相，好像媽媽帶著一個小孩喔，妳又發現什麼？

$$1\frac{1}{2}、2\frac{2}{3}、3\frac{3}{5}、4\frac{6}{8}、5\frac{20}{21}、6\frac{11}{30}、7\frac{15}{25}、8\frac{6}{12}、9\frac{18}{27}$$

妳是否發現到，牠們好像是一個整數帶著一個分數，這就是帶分數了。

說明：分數正常應該是真分數的樣子，但有時候便會出現不同的模樣了，那就是假分數與帶分數。

例如：小明原先拿到 $\frac{1}{4}$ 塊的披薩，後來因為爸爸再給他1塊披薩，這時小明拿到多少的披薩呢？要怎麼表示呢？



$$\frac{1}{4} \text{ 塊的披薩}$$

$$1 \text{ 塊披薩}$$

$$\frac{1}{4} \text{ 塊} + \frac{4}{4} \text{ 塊} = \frac{5}{4} \text{ 塊}$$

這就是假分數

但是

$$\frac{4}{4} \text{ 塊} = 1 \text{ 塊}$$

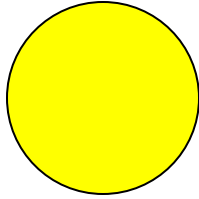
所以我們可以把上面的式子做改變。

$$\frac{1}{4} \text{ 塊} + 1 \text{ 塊} = 1\frac{1}{4} \text{ 塊的披薩}$$

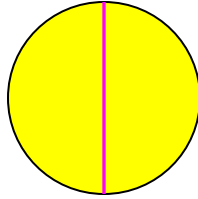
這就是帶分數

【何謂等值分數】

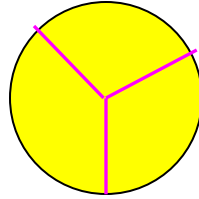
1. 利用披薩來舉例說明



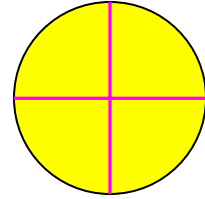
1 塊



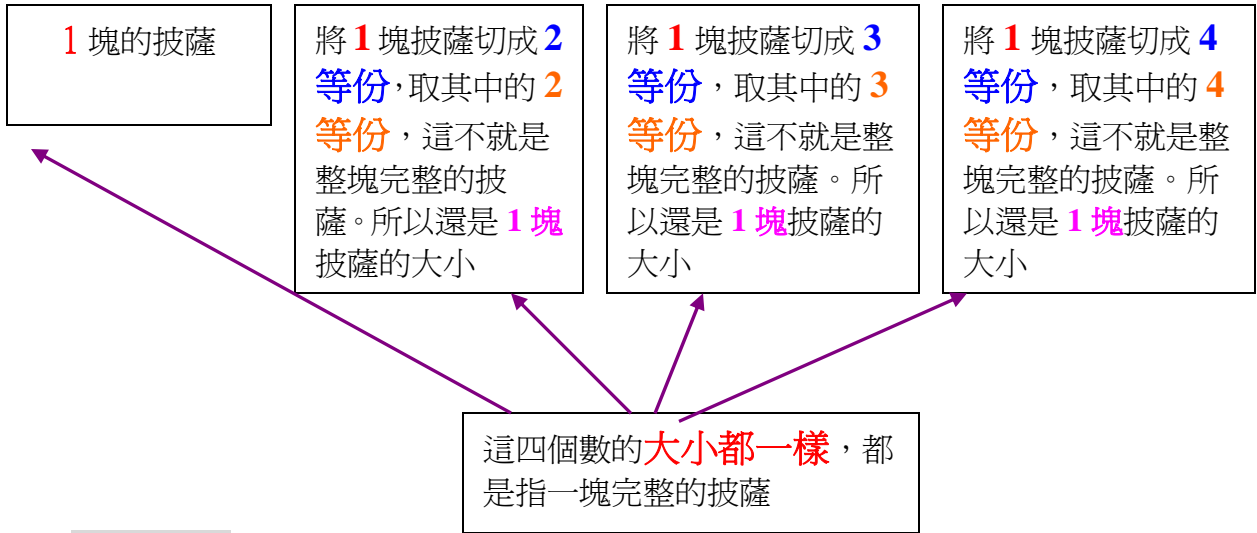
$\frac{2}{2}$ 塊



$\frac{3}{3}$ 塊



$\frac{4}{4}$ 塊



所以我們發現：

$$1 \text{ 塊} = \frac{2}{2} \text{ 塊} = \frac{3}{3} \text{ 塊} = \frac{4}{4} \text{ 塊}$$

說明：從上面的式子，我們看到這四個數字雖然長的不一樣，但是所代表的大小都相同（都是指一塊完整的披薩），因此我們就稱 $\frac{2}{2}$ 與 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{4}{4}$ 這三個分數為**等值分數**【注意 1 是整數喔】

動動腦：

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8}$$

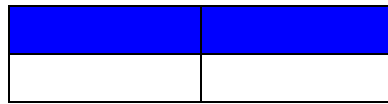
請問上面的式子正確嗎？牠們都是**等值分數**嗎？

【等值分數延伸】



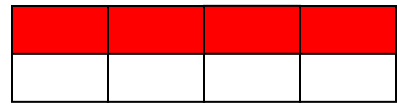
$$\frac{1}{2}$$

一張紙切成 2 等份，取其中的 1 等份



$$\frac{2}{4}$$

一張紙切成 4 等份，取其中的 2 等份



$$\frac{4}{8}$$

一張紙切成 8 等份，取其中的 4 等份



原來牠們都是一張紙的一半

妳是否發現這三個分數，所代表的都是這張紙的**一半**呢？原來**牠們的大小都一樣**啊！

所以我們可以知道

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

← 這三個分數都是**等值分數**

【提示】請參考下面的圖，完成問題



$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{(\quad)}{6} = \frac{(\quad)}{12} = \frac{(\quad)}{16}$$

妳是否發現：分子與分母**同時乘以一個數字**，產生的新分數，其數值大小跟原來的一樣，也就是**等值分數**。

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

分子與分母同時乘以 **2**

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$$

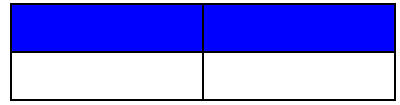
分子與分母同時乘以 **4**

說明：



$$\frac{1}{2}$$

一張紙切割成 2 等份，取其
中的 1 等份，這就是 $\frac{1}{2}$



$$\frac{2}{4}$$

一張紙切割成 4 等份，取其
中的 2 等份，這就是 $\frac{2}{4}$

每等份再切割成兩
半，結果所有的等份
都**變大 2 倍**。總共分
割的等份由 2 變成
4；所佔的等份也由 1
變成 2

算式：

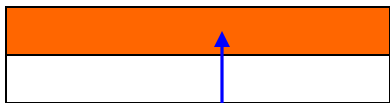
分子與分母的數字好像變大了，
實際上**分數的大小還是沒變**，因
為牠們代表的還是一張紙的**一半**

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

每一等份再細分成兩半時，其分子與分母的等份也跟著變為原
來的 2 倍，但分數的**大小不變**，只是**切的等份變多了**

細部圖解：

<當等份再被細分成一半時，注意**分子與分母**的變化>

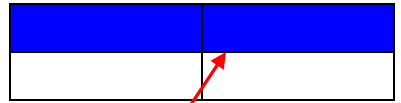


分子原為 1 等份

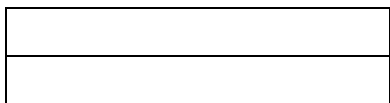
$$\frac{1}{2}$$



分子經過分割成兩半後，等
份變成 2

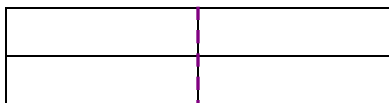


$$\frac{2}{4}$$



分母原為 2 等份

$$\frac{1}{2}$$



分母經過分割成兩半後，等
份變成 4

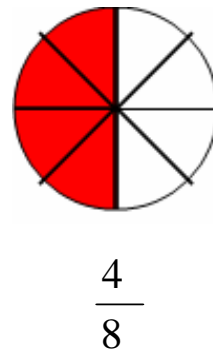
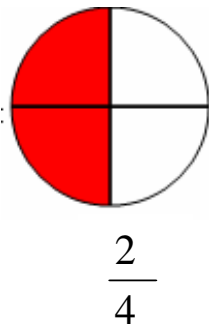
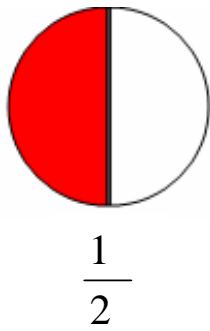


$$\frac{1}{2}$$

【等值分數探討】

觀察：發現到分子與分母同時乘以一個數字，所得到的結果，看起來數字好像變大了，實際上根本沒有改變，只是切成更小的等份而已，所代表的**大小還是一樣**。

例如：阿忠今天拿到披薩，其切法如下面所呈現的三種型態，那阿忠吃到的披薩會比較少嗎？答案是都一樣，因為阿忠都是吃半塊的披薩。



原來這三種切法，阿忠無論選擇哪一種，結果都一樣，因為他都是吃半塊的披薩。

一塊披薩切割成 2 等份，取其中的 1 等份，這就是 $\frac{1}{2}$ 塊披薩

一塊披薩切割成 4 等份，取其中的 2 等份，這就是 $\frac{2}{4}$ 塊披薩

一塊披薩切割成 8 等份，取其中的 4 等份，這就是 $\frac{4}{8}$ 塊披薩

結論：分子與分母同乘以一個數字，其結果是不變的。看起來雖然數字好像變大了，其實只是切成更細的等份，每等份的大小反而變小了，所以整個看起來大小還是不變。

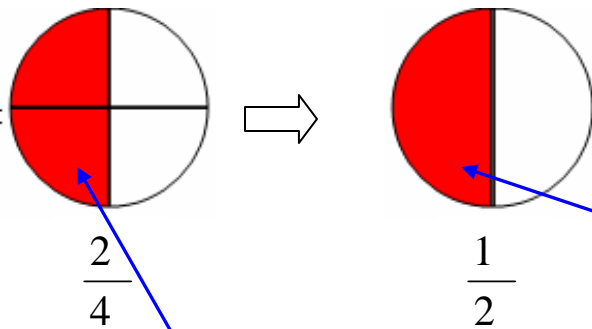
$$\frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

都是半塊披薩的大小，也是等值分數

分子與分母同時乘以 4

動動腦：既然知道分數的分子與分母，同時乘以一個數字，產生的新分數，跟原來的分數大小是相同的，而這些分數通通被稱做等值分數。那麼分數的分子與分母，同時除以一个公因數，產生的新分數，跟原來的分數大小會相同嗎？

說明：分子與分母同除以一个公因數，所得到的新分數，還是跟原來的分數大小一樣。



$$\frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$$

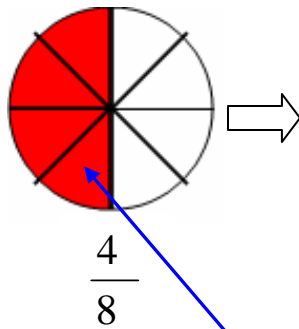
大小沒有改變，還是等於 $\frac{2}{4}$

分子與分母同除以 2

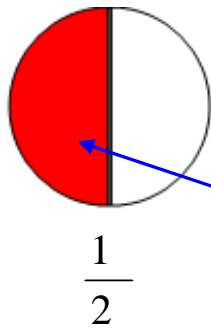
將每 2 等份合併成 1 等份

合併的結果，使得全部的等份變成 2，而所佔的等份變成 1，產生新的分數 $\frac{1}{2}$ ，但是大小還是不變，還是半塊的披薩大小

大小沒有改變，還是



將每 4 等份合併成 1 等份



$$\frac{4 \div 4}{8 \div 4} = \frac{1}{2} \text{ 等於 } \frac{4}{8}$$

分子與分母同除以 4

合併的結果，使得全部的等份變成 2，而所佔的等份變成 1，產生新的分數 $\frac{1}{2}$ ，但是大小還是不變，還是半塊的披薩大小

試試看：

A、同乘某數

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{(\quad)}{16} = \frac{(\quad)}{32} = \frac{(\quad)}{42} = \frac{25}{(\quad)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{(\quad)}{15} = \frac{(\quad)}{21} = \frac{(\quad)}{27} = \frac{12}{(\quad)}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{(\quad)}{20} = \frac{(\quad)}{30} = \frac{(\quad)}{45} = \frac{32}{(\quad)}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{(\quad)}{16} = \frac{(\quad)}{20} = \frac{(\quad)}{28} = \frac{27}{(\quad)}$$

B、同除某數

$$\frac{18}{24} = \frac{(\quad)}{4} \quad \frac{9}{18} = \frac{(\quad)}{2} \quad \frac{15}{30} = \frac{(\quad)}{2}$$

$$\frac{15}{40} = \frac{(\quad)}{8} \quad \frac{8}{36} = \frac{(\quad)}{9} \quad \frac{14}{35} = \frac{(\quad)}{5}$$

$$\frac{30}{48} = \frac{5}{(\quad)} \quad \frac{30}{45} = \frac{2}{(\quad)} \quad \frac{12}{20} = \frac{3}{(\quad)}$$

【什麼叫做擴分】

擴分：一個分數的分子與分母，同時**乘以一個數字**，產生一個新分數，這個動作就叫做**擴分**。別緊張你剛剛不是做了這個動作嗎（在上一頁的試試看，A、**同乘某數**的部分）？所以別被它的名稱給嚇到了。分數看起來是不是好像擴大了，不過實際的大小並沒有改變，還是**跟原來的一樣大**！（可參考P6的圖形介紹說明）

說明：

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

雖然做了**擴分**的動作，但是分數的大小是沒有改變的

分子與分母同時乘以2，產生新的分數 $\frac{2}{4}$ ，這個動作叫做**擴分**

所以我們可以知道： $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{9}{18}$

$$\frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8} \quad \frac{1 \times 8}{2 \times 8} = \frac{8}{16} \quad \frac{1 \times 9}{2 \times 9} = \frac{9}{18}$$

分子與分母**同時乘以一個數字**，產生新的分數，經過**擴分**這個動作，分數的大小沒有改變，牠們還是等於 $\frac{1}{2}$

【什麼叫做約分】

約分：一個分數的分子與分母，同時**除以公因數**，產生一個新分數，這個動作就叫做**約分**。放輕鬆這個你剛剛也是有做過喔（在上一頁的試試看，B、**同除某數**的部分），所以別被它的名稱給嚇到了。分數看起來是不是好像變小了，不過實際的大小並沒有改變，還是**跟原來的一樣大**！

$$\frac{2}{4} \Rightarrow \frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2} \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

雖然做了**約分**的動作，但是分數的大小是沒有改變的

分子與分母同時除以2，產生新的分數 $\frac{1}{2}$ ，這個動作叫做**約分**

所以我們可以知道： $\frac{9}{18} = \frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\frac{9}{18} \Rightarrow \frac{9 \div 9}{18 \div 9} = \frac{1}{2} \quad \frac{8}{16} \Rightarrow \frac{8 \div 8}{16 \div 8} = \frac{1}{2}$$

分子與分母同時除以9，做**約分**的動作

分子與分母同時除以8，做**約分**的動作

結論：

$$\frac{1}{2} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} \frac{1 \times 8}{2 \times 8} & \Rightarrow & \frac{8}{16} \\ \frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{8 \div 8}{16 \div 8} & \leftarrow & \frac{8}{16} \end{matrix}$$

把 $\frac{1}{2}$ 做**擴分**的動作，分子與分母**同乘以 8**，產生新的分數 $\frac{8}{16}$ ；相反地，顛倒方向回去，對 $\frac{8}{16}$ 做**約分**的動作，分子與分母**同除以 8**，這時新的分數又變成原本的 $\frac{1}{2}$ ，因此**擴分**與**約分**只是方向不同而已。

【什麼叫做通分】

通分：兩個以上分數，**運用擴分或約分的方法**，將不同分母的分數，變成**相同分母的分數**，這個就叫做**通分**。

想一想：小明拿著美金1元，阿華拿著新台幣1元，我們可以知道誰的錢比較多嗎？
說明：同樣都是1元，但是美金與新台幣所代表的價值是不一樣的，因此我們無法從1元去判斷大小，除非把牠們都換成相同的錢幣（美金或新台幣）。

假設：美金 1 元等於新台幣 30 元

小明 \Rightarrow 美金 1 元 = 新台幣 30 元

阿華 \Rightarrow 新台幣 1 元

通分這名稱是指經用擴分或約分的動作，目的是為了比大小等

因此我們可以知道小明的錢比阿華多 $\frac{30}{30} > \frac{1}{30}$ 新台幣 30 元 > 新台幣 1 元

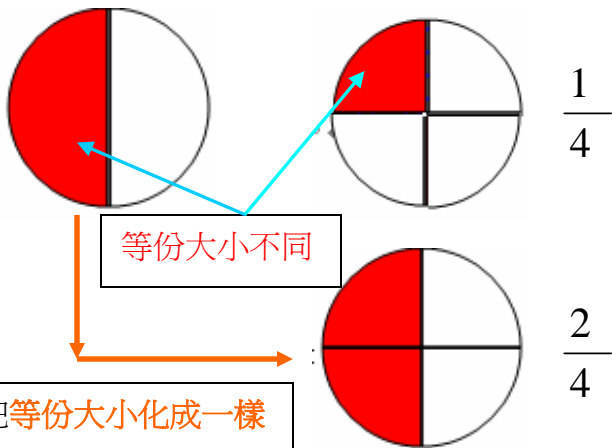
通分

擴分

約分

動動腦：同樣的分數之間如何比較大小呢？

$\frac{1}{2}$ **與** $\frac{1}{4}$ 哪一個分數比較大呢？



$$\frac{1}{2}$$

以披薩為例，代表將披薩切割成 **2 等份**，取其中的 1 等份

$$\frac{1}{4}$$

以披薩為例，代表將披薩切割成 **4 等份**，取其中的 1 等份

注意：切割的**等份大小都不同**喔

由上一頁的圖片說明，我們清楚的知道 $\frac{2}{4} > \frac{1}{4}$ ，但是 $\frac{2}{4}$ 怎麼來的呢？原來的 $\frac{1}{2}$ 是經由**通分**，把他們的等份化成相同的大小，所以分母都變成 4，才能比較大小，這種狀況就如同美金與新台幣一樣，需要換算成相同的幣值才能做大小的比較。

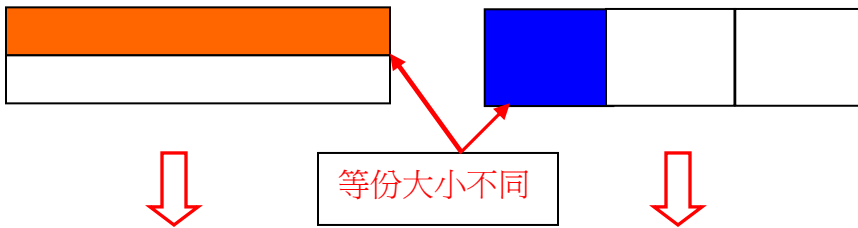
算式：
$$\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

$\frac{1}{4}$

爲了讓牠們的等份大小都變成一樣的，所以把**分母都變成 4**，當然**分母乘以 2**，**分子也要跟著乘以 2**，不然分數的大小會改變。

所以經由**通分**後：我們知道 $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ 此時的通分是經由**擴分**的動作去完成的

又例如： $\frac{1}{2}$ **與** $\frac{1}{3}$ 哪一個分數比較大呢？



$\frac{1}{2}$ 以紙張為例，代表將紙張切割成 **2 等份**，取其中的 1 等份

$\frac{1}{3}$ 以紙張為例，代表將紙張切割成 **3 等份**，取其中的 1 等份

注意：切割的**等份大小都不同**喔



$\frac{3}{6}$ 把**等份大小化成一樣** $\frac{2}{6}$

算式：
$$\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

爲了讓牠們的等份大小都變成一樣的，所以利用最小公倍數的概念，把**分母都變成 6**，結果 $\frac{1}{2}$ 的部分，**分母乘以 3**，**分子也要跟著乘以 3**，產生新分數 $\frac{3}{6}$ ；而 $\frac{1}{3}$ 的部分，**分母乘以 2**，**分子也要跟著乘以 2**，產生新分數 $\frac{2}{6}$ 。結果我們知道 $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

因此我們知道 $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

試試看：想看看如何讓分母都變成一樣呢？該乘以多少呢？原來要找最小公倍數。

$$\frac{1}{3} \quad \text{與} \quad \frac{1}{4} \quad \text{哪一個分數比較大呢？}$$

$$\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 \times (\quad)}{3 \times (\quad)} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

$$\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 \times (\quad)}{4 \times (\quad)} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

因此我們知道

$$\frac{1}{(\quad)} > \frac{1}{(\quad)}$$

$$\frac{2}{3} \quad \text{與} \quad \frac{3}{5} \quad \text{哪一個分數比較大呢？}$$

$$\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2 \times (\quad)}{3 \times (\quad)} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

$$\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3 \times (\quad)}{5 \times (\quad)} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

因此我們知道

$$\frac{(\quad)}{(\quad)} > \frac{(\quad)}{(\quad)}$$