2-2 根式的運算

含有根號的式子就叫做**根式**。例如，$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}+\sqrt{2}$、$\sqrt{2}-1$、$2\cdot\sqrt{5}$、…等都叫做根式。在這一節和下一節中，我們將學習如何進行根式的運算。

以前我們學過有理數的運算具有交換律與結合律。那麼，像 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、……等，這些無理數的運算，是否也具有同樣的運算規則呢？

若一個長方形的長是$\sqrt{3}$，寬是$\sqrt{2}$，如圖 2-5，則此長方形的面積可記錄為 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$，也可以記錄為 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$。而 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ 都表示此長方形的面積，所以 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$。也就是說，

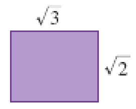


圖 2-5

根式的運算合乎乘法交換律：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}$，其中 a、$b\geq 0$。

如圖 2-6，長方體的長、寬、高分別為 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$，則
長方體的體積＝長・寬・高＝$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$
長方體的體積＝底面積・高＝$(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}$
長方體的體積＝底面積・高＝$(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})\cdot\sqrt{2}$
所以 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})$。

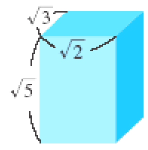


圖 2-6

綜合上述可知，

根式的運算合乎乘法結合律：
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})\cdot\sqrt{c}=\sqrt{a}\cdot(\sqrt{b}\cdot\sqrt{c})$
其中 a、b、$c\geq 0$。

【根式的乘法】 若 a、b 為正數或零，則 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$。

計算 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

例 1、

求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}$　　(3) $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{\frac{25}{2}}$

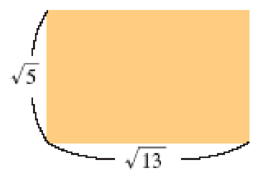
練 1、

1. 求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}$　　(2) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$

(3) $\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt{\frac{9}{5}}$　　(4) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$

2. 如右圖，已知一長方形的長是 $\sqrt{13}$ 公分，寬是 $\sqrt{5}$ 公分，求長方形的面積。



【最簡根式】

在進行根式的運算時，我們常將 $\sqrt{45}$ 整理成 $3\sqrt{5}$，像這樣將 $\sqrt{a}$ 化成 $r\sqrt{n}$ 的形式，其中 r 是一個有理數，n 是一個正整數，且 n 的因數中不含有質數的平方，這種根式就稱為**最簡根式**。事實上，當一個根式有下列任何一種情形時，就不是最簡根式：

(1) 根號內是正整數，但此正整數的因數中含有質數的平方。
例如，$\sqrt{12}$ 不是最簡根式。因為 12 的因數為 1、2、3、4、6、12，其中因數 4 為質數 2 的平方。

(2) 根號內有分數。例如，$\sqrt{\frac{2}{3}}$不是最簡根式。

(3) 分母有根式。例如，$\frac{5}{\sqrt{2}}$不是最簡根式。

練習：

下列根式中，哪些是最簡根式？

$\sqrt{18}$，$\sqrt{25}$，$\sqrt{15}$，$\frac{2}{3}\sqrt{6}$，$\frac{\sqrt{24}}{2}$，$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

例 2、 將下列各式化為最簡根式： (1) $\sqrt{5^2 \cdot 3}$　　(2) $\sqrt{2^5 \cdot 3^2}$	練 2、 將下列各式化為最簡根式： (1) $\sqrt{2^4 \cdot 3^3}$　　(2) $\sqrt{2^5 \cdot 5^3}$
例 3、 請將 $\sqrt{108}$ 化為最簡根式。	練 3、 將下列各式化為最簡根式： (1) $\sqrt{27}$　(2) $\sqrt{50}$　(3) $\sqrt{80}$　(4) $3\sqrt{12}$

【根式的乘法】 若 $a \geqq 0$，$b > 0$，則 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$。

計算 $\sqrt{11} \div \sqrt{3}$

例 4、 將下列各式化為最簡根式： (1) $\frac{3}{\sqrt{2}}$　(2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$　(3) $\sqrt{\frac{7}{18}}$	練 4、 將下列各式化為最簡根式： (1) $\sqrt{\frac{7}{12}}$　(2) $\sqrt{\frac{1}{3}}$　(3) $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$
例 5、 計算下列各式，並將結果化為最簡根式： (1) $\sqrt{52} \div \sqrt{13}$　(2) $\sqrt{6} \div \sqrt{12}$	例 6、 計算下列各式，並將結果化為最簡根式： (1) $\sqrt{\frac{2}{5}} \div \sqrt{\frac{6}{5}}$　(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

練 6、

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \div \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{5}{4}} \div \sqrt{\dfrac{8}{5}}$

例 7、

利用右表查出下列各數的近似值：

(1) $\sqrt{1800}$

(2) $\sqrt{2.3}$

(3) $\sqrt{261}$

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
18	324	4.242	13.416
23	529	4.795	15.165
29	841	5.385	17.029

練 7、

請由課本附錄的乘方開方表查出下列各數的近似值：（以四捨五入法取到小數第三位）

(1) $\sqrt{0.83}$≒____________

(2) $\sqrt{80000}$ ≒____________

(3) $\sqrt{3.51}$≒____________

【根式的加減】同類方根合併

例 8、

計算 $7\sqrt{3}-3\sqrt{3}$。

練 8、

計算下列各式：

(1) $\sqrt{2}+4\sqrt{2}$　　(2) $5\sqrt{7}-2\sqrt{7}$

(3) $6\sqrt{6}-\sqrt{6}$　　(4) $5\sqrt{3}-7\sqrt{3}$

【動動腦】

利用電算器分別計算 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{5}$，它們的近似值相等嗎？

例 9、

計算下列各式：

(1) $\sqrt{98}+\sqrt{72}$　　(2) $\sqrt{108}-5\sqrt{12}$

練 9、

計算下列各式：

(1) $3\sqrt{8}+\sqrt{18}$　　(2) $\sqrt{45}-2\sqrt{20}$

(3) $5\sqrt{24}+3\sqrt{54}$　　(4) $4\sqrt{12}-2\sqrt{27}-\sqrt{3}$

例 10、

計算下列各式：

(1) $5(1+\frac{2}{5}\sqrt{6})$　　(2) $-3(\sqrt{49}-\frac{1}{2}\sqrt{2})$

(3) $\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$　　(4) $5(1+\frac{2}{5}\sqrt{6})-3(\sqrt{25}-\frac{1}{3}\sqrt{6})$

練 10、

計算下列各式：

(1) $4(\sqrt{20}-\sqrt{9})$　　(2) $4(2-\frac{1}{4}\sqrt{3})-3(5-\frac{2}{3}\sqrt{3})$

(3) $\sqrt{6}(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

例 11、 計算下列各式： (1) $3\sqrt{8}+\sqrt{27}+\sqrt{18}-\sqrt{48}$　　(2) $\frac{3}{\sqrt{2}}+4\sqrt{2}$	練 11、 計算下列各式： (1) $5(\sqrt{98}-\sqrt{75})-2(3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$　　(2) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$
例 12、 利用乘法公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 展開 $(3+\sqrt{5})^2$，並化簡其結果。	練 12、 利用乘法公式 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 展開 $(4-\sqrt{3})^2$，並化簡其結果。
例 13、 利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開 $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$。	練 13、 利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$。
例 14、 利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 化簡 $\frac{3}{\sqrt{6}-2}$。	練 14、 化簡下列各式： (1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$　　(2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$　　(3) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$
【重點回顧】 *1.* 若 $a\geqq 0$，$b\geqq 0$，則 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$。 *2.* 最簡根式：將 $\sqrt{a}$ 化成 $r\sqrt{n}$ 的形式，其中 r 是一個有理數，n 是一個正整數，且 n 的因數中不含有質數的平方，這種根式就稱為最簡根式。 *3.* 若 $a\geqq 0$，$b>0$，則 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$。 *4.* 同類方根：針對兩個或兩個以上的方根化為最簡根式後，如果根號內的數相同，這種方根就叫做同類方根。 *5.* 根式做加減運算時，要將同類方根合併；不是同類方根，就無法合併。 *6.* 若 $a>0$，$b>0$，則化簡分母為 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$、$\sqrt{a}\pm b$ 或 $a\pm\sqrt{b}$ 的根式時，可以利用平方差公式把分母的根號消去。	

2-2 自我評量

1. 將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{45}$　　(2) $\sqrt{2^5 \cdot 3^3}$　　(3) $\sqrt{\frac{3}{2}}$　　(4) $\sqrt{\frac{5}{24}}$

2. 計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{\frac{125}{4}} \cdot \sqrt{\frac{32}{5}}$　　(3) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{98}$　　(4) $\sqrt{(-3)^2} \cdot \sqrt{4}$

(5) $\sqrt{\frac{4}{9}} \div \sqrt{\frac{4}{3}}$　　(6) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

3. 已知$\sqrt{87} \fallingdotseq 9.327$，$\sqrt{870} \fallingdotseq 29.496$，則 $\sqrt{87000} \fallingdotseq$ ＿＿＿＿＿＿，$\sqrt{8.7} \fallingdotseq$ ＿＿＿＿＿＿。

4. 化簡下列各式：

(1) $3\sqrt{6} - 8\sqrt{6}$　　(2) $\sqrt{72} - \sqrt{32}$　　(3) $\frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{27}$　　(4) $\sqrt{75} - 2\sqrt{48}$

(5) $\sqrt{5}\,(\sqrt{15} + \sqrt{3})$　　(6) $3\sqrt{24} + \sqrt{96} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$

5. 利用乘法公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 展開 $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2$，並化簡其結果。

6. 利用乘法公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 展開 $(3\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - \sqrt{5})$。

7. 利用乘法公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 化簡 $\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$。

8. 計算下列各式：

(1) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$　　(2) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} - 1}$

2-3 勾股定理

勾股定理

小學時學過，三角形中若有一個內角是直角（90°），這樣的三角形就是直角三角形，其中直角所對的邊稱為**斜邊**，其餘兩個邊稱為**股**（如圖 2-11）。我們平常使用的三角板，都有一個角是直角，它們都是直角三角形。

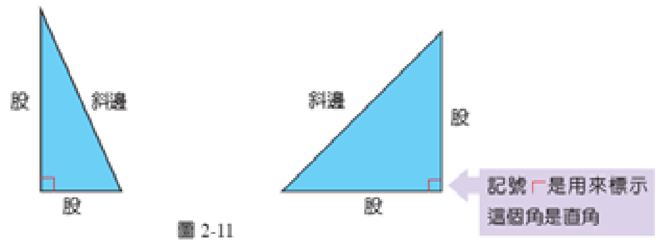


圖 2-11

如圖 2-12，我們取四個相同的直角三角形，疊在一個邊長為 $a+b$ 的大正方形的四個角落。

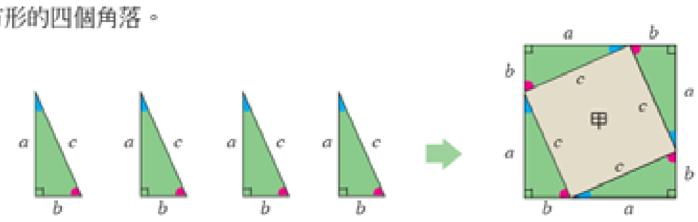


圖 2-12

圖 2-12 中，所有紅色的角都相等，所有藍色的角也都相等，由於紅色的角和藍色的角加起來是 90 度，所以四邊形甲的四個內角都是 90 度。因此，四邊形甲是一個正方形。

正方形甲的面積＝大正方形面積－四個直角三角形面積和，即

$$c^2=(a+b)^2-\frac{ab}{2}\cdot 4=a^2+2ab+b^2-2ab=a^2+b^2$$

由上面的說明，我們可以推導出直角三角形的邊長關係：

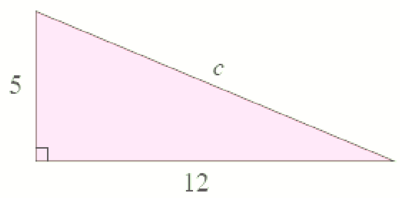
任意一個直角三角形，其兩股長的平方和等於斜邊長的平方。

這個關係叫做**勾股定理**，西方人則稱為畢達哥拉斯定理（**畢氏定理**）。

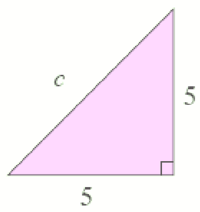
例 1、

已知下列各直角三角形的兩股長，求斜邊的長。

(1)



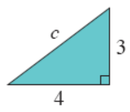
(2)



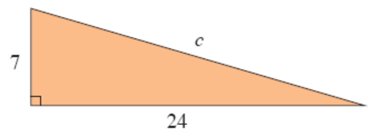
練 1、

已知下列各直角三角形的兩股長，求斜邊的長。

(1)



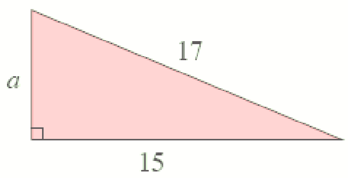
(2)



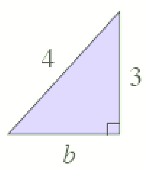
例 2、

已知下列各直角三角形一股與斜邊的長，求另一股的長。

(1)

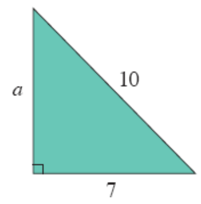


(2)



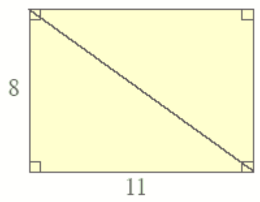
練 2、

如右圖，直角三角形的斜邊長為 10，一股長為 7，求另一股的長。

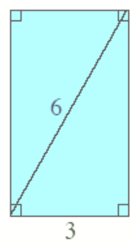


例 3、

(1)求長方形的對角線長。

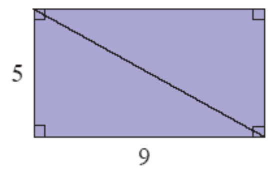


(2)求長方形的另一邊長。

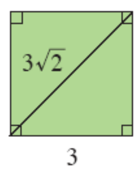


練 3、

(1)求長方形的對角線長。

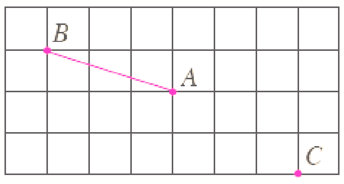


(2)求長方形的另一邊長。



例 4、

右圖中每一小格皆為邊長 1 公分的正方形，求 $\overline{AB}$ 的長。



練 4、

求例題 4 圖中 $\overline{AC}$ 的長。

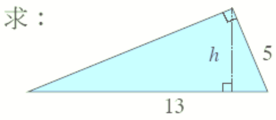
例 5、

如右圖，直角三角形斜邊長為 13，一股長為 5，求：

(1)另一股的長。

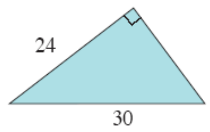
(2)此三角形的面積。

(3)斜邊上的高。



練 5、

如右圖，求此直角三角形的面積及斜邊上的高。

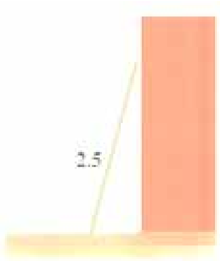


例 6、

如右圖，翰翰把長 2.5 公尺的梯子放在離牆腳 0.7 公尺處。

(1)請問梯頂離地面多少公尺？

(2)如果翰翰覺得梯子架得太高了，想要降低 0.4 公尺，則應將梯腳放在離牆腳幾公尺處？



練 6、

一把梯子斜靠在牆上，已知梯子長 2.5 公尺，梯腳離牆腳 2 公尺，

(1)求梯頂離地面多少公尺？

(2)若將梯腳向牆腳挪近 0.5 公尺，請問梯頂會向上移動多少公尺？

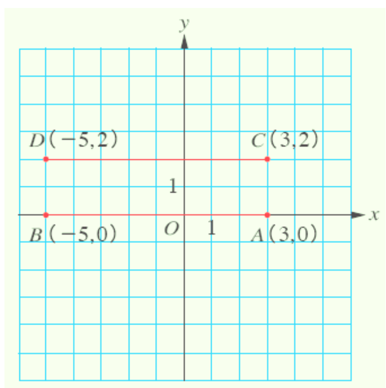
※平面上兩點距離：**(1)** 數線上 $A(a)$、$B(b)$ 兩點的距離為 $\overline{AB}=|a-b|$

例 7、

如右圖，已知坐標平面上 $A(3, 0)$、$B(-5, 0)$、$C(3, 2)$、$D(-5, 2)$ 四點，

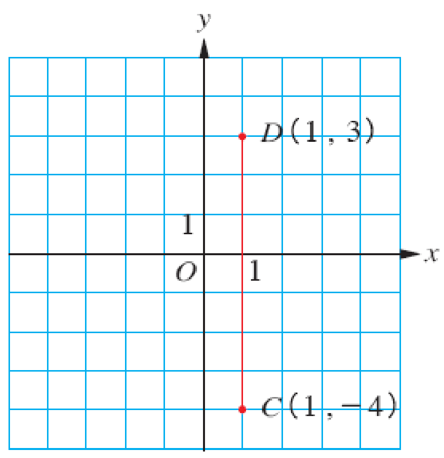
(1)求 $\overline{AB}$ 的長。

(2)求 $\overline{CD}$ 的長。



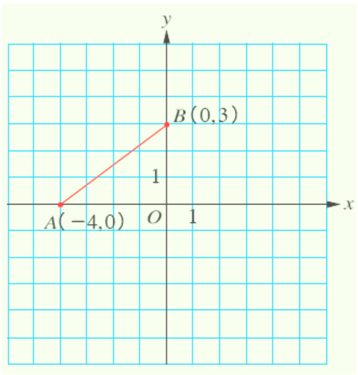
練 7、

如右圖，已知坐標平面上 $C(1, -4)$、$D(1, 3)$ 兩點，求 $\overline{CD}$ 的長。



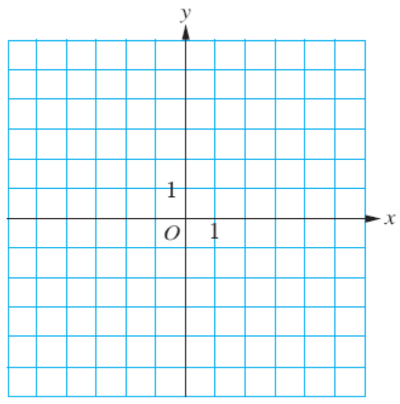
例 8、

如右圖，已知坐標平面上 $A(-4, 0)$、$B(0, 3)$ 兩點，求 $\overline{AB}$ 的長。



練 8、

在右圖的坐標平面上標出 $A(5, 0)$、$B(0, -3)$ 兩點，並求出 $\overline{AB}$ 的長。

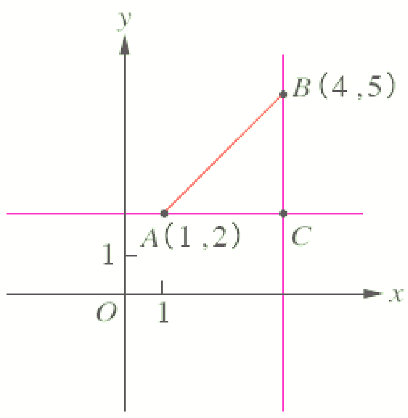


例 9、

如右圖，已知坐標平面上 $A(1, 2)$、$B(4, 5)$ 兩點，

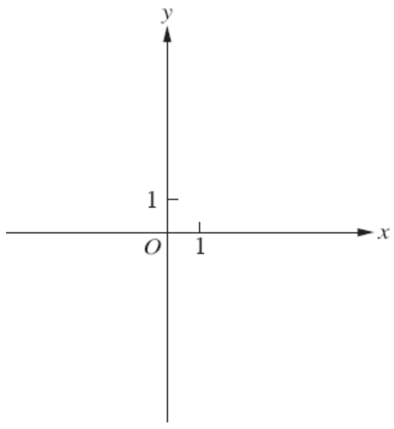
(1) 過 A 點作平行 x 軸的水平線，過 B 點作平行 y 軸的鉛垂線，設兩直線相交於 C 點，求 C 點坐標。

(2) 求 $\overline{AB}$ 的長。



練 9、

在右圖的坐標平面上標出 $A(-4, -5)$、$B(2, 3)$ 兩點，並求出 $\overline{AB}$ 的長。



※平面上兩點距離：**(2)** 坐標平面上任意兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

例 10、

已知坐標平面上 $A(2, 1)$、$B(-4, 9)$ 兩點，求 $\overline{AB}$ 的長。

練 10、

(1) 已知坐標平面上 $A(0, 0)$、$B(-8, -6)$ 兩點，求 $\overline{AB}$ 的長。

(2) 已知坐標平面上 $C(-2, 0)$、$D(-7, -12)$ 兩點，求 $\overline{CD}$ 的長。

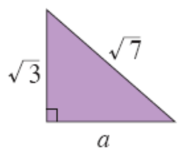
重點回顧

1. 勾股定理：直角三角形兩股長的平方和等於斜邊長的平方。
2. 已知一個直角三角形兩邊的長度，可以利用勾股定理求出第三邊的長度。
3. 平面上兩點的距離：坐標平面上任意兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

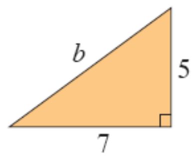
2-3 自我評量

1. 利用勾股定理計算下列各圖形未知的邊長：

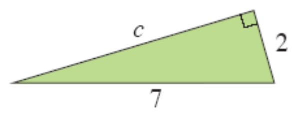
(1)



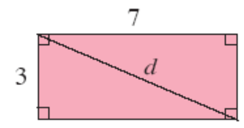
(2)



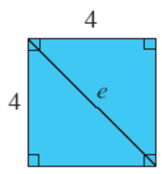
(3)



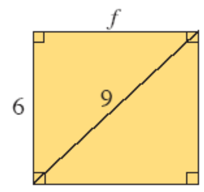
(4)



(5)



(6)



2. 已知一直角三角形的斜邊長為 8，一股長為 5，求另一股長。

3. 已知一直角三角形的斜邊長為 41，一股長為 40，求另一股長。

4. 已知一直角三角形的兩股長分別為 $\sqrt{11}$ 、5，求斜邊長。

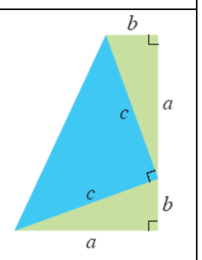
5. 已知一直角三角形的兩邊長分別為 3、4，求第三邊的長。

6. 如右圖，兩個相同的綠色直角三角形（兩股長分別為 a、b，斜邊長為 c）與一個藍色的等腰直角三角形（腰長為 c）拼成一個梯形，請問：

(1)梯形面積＝________________。（以 a、b 表示）

(2)藍色三角形的面積＝________________。（以 c 表示）

(3)由「梯形面積＝藍色三角形的面積＋兩個綠色三角形的面積」列出算式，並將它展開、化簡，可以得到什麼式子？



7. 虎克船長在無人島上埋藏寶藏，他先在 A 地紮營，然後向東走 15 公里到達 B 地，藏了第一批珠寶；再由 B 地向南走 8 公里到達 C 地，藏了第二批珠寶；之後，疲倦的虎克船長由 C 地走直線回到 A 地。請問虎克船長共走了多少公里？

8. 求下列各小題中，坐標平面上兩點間的距離：

(1) $A(6,-3)$、$B(-2,-3)$　　(2) $C(2,-1)$、$D(5,3)$

(3) $E(5,-3)$、$F(-2,21)$　　(4) $G(1,1)$、$H(2,3)$

3-1 提公因式

【因式和倍式】

國小時，我們曾經學過如何利用整數的除法來判別因數與倍數。例如，因為 $14\div2=7$，2 能整除 14，所以 2 是 14 的因數，14 是 2 的倍數。而 $14\div5$ 得商為 2，餘數為 4；因為 5 不能整除 14，所以 5 不是 14 的因數，14 不是 5 的倍數。

同樣地，要判斷一個多項式 A 是否為另一個多項式 B 的因式，可以用多項式除法來檢驗。如果多項式 A 能整除多項式 B，我們就稱 A 是 B 的**因式**，B 是 A 的**倍式**；如果多項式 A 不能整除多項式 B，則 A 不是 B 的因式，B 不是 A 的倍式。

例如，要判斷 $x-3$ 是否為 x^2-4x+3 的因式，可由多項式除法知道 $(x^2-4x+3)\div(x-3)=x-1$，因為能整除，所以 $x-3$ 為 x^2-4x+3 的因式，x^2-4x+3 為 $x-3$ 的倍式。

例 1、

(1) $x-3$ 是否為 $2x^2-x-15$ 的因式？

(2) $x+1$ 是否為 x^2-3x-1 的因式？

練 1、

(1) $x+2$ 是否為 $x^2-5x-14$ 的因式？

(2) x^3+1 是否為 $x+1$ 的倍式？

【因式分解的意義】

由例題 1 中 $(2x^2-x-15)\div(x-3)=2x+5$，我們可以知道 $2x^2-x-15=(x-3)(2x+5)$。

一般來說，如果多項式 B 能整除多項式 A，得到商式為多項式 C，我們就可利用第 1 章所學的「被除式＝除式．商式＋餘式」寫成 $A=B\cdot C$。將多項式 A 寫成多項式 B、C 的乘積，稱為將多項式 A **因式分解**。

將一個多項式寫成兩個或兩個以上多項式的乘積，就稱為將該多項式因式分解。

例如，$(x-3)(x+3)=x^2-9$，其中 $x-3$、$x+3$ 都是 x^2-9 的因式，x^2-9 為 $x-3$、$x+3$ 的倍式。將 x^2-9 寫成 $x-3$、$x+3$ 兩個多項式相乘，即 $x^2-9=(x-3)(x+3)$，就是將 x^2-9 因式分解為 $(x-3)(x+3)$。

例 2、判斷 $x+1$ 是否為 x^2-5x-6 的因式。如果 $x+1$ 是 x^2-5x-6 的因式，試將 x^2-5x-6 因式分解。

練 2、判斷 $x-1$ 是否為 $2x^2+x-3$ 的因式。如果 $x-1$ 是 $2x^2+x-3$ 的因式，試將 $2x^2+x-3$ 因式分解。

【提公因式】

形如 $A\cdot C+B\cdot C$ 的多項式，其中 $A\cdot C$ 和 $B\cdot C$ 兩項有共同的因式 C，我們稱 C 為 $A\cdot C$ 和 $B\cdot C$ 的**公因式**。如果我們將公因式 C 提出來，寫成 $A\cdot C+B\cdot C=(A+B)\cdot C$，就是將多項式 $A\cdot C+B\cdot C$ 因式分解。

將多項式寫成 $A\cdot C+B\cdot C=(A+B)\cdot C$ 的過程，其實就是分配律的逆運算。

$$A\cdot C+B\cdot C \underset{\text{分配律}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftarrows}} (A+B)\cdot C$$

例如，多項式 x^2+3x 含有 x^2、$3x$ 兩項，而 $x^2=x\cdot x$，且 $3x=3\cdot x$，兩項都含有因式 x，亦即 x 是 x^2 與 $3x$ 的公因式，根據分配律可得

$$\begin{aligned} x^2+3x &= x\cdot x+3\cdot x \\ &= (x+3)\cdot x \\ &= x(x+3) \end{aligned}$$

這種因式分解的方法就稱為「提公因式」。

練習、

寫出下列各小題中兩多項式的公因式：

(1) $5x$ 與 x^2 的公因式為__________。

(2) $3(x+1)$ 與 $x(x+1)$ 的公因式為__________。

(3) $(x+1)(x+2)$ 與 $(x+2)(x-1)$ 的公因式為__________。

例 3、 因式分解下列各式： (1) $3ab+5b^2$　(2) $5x^2+x$　(3) $4x^2+5xy-3x$	練 3、 因式分解下列各式： (1) a^2+5a　(2) $6ab-a$
例 4、 因式分解下列各式： (1) $2x^2+x(x+1)$　(2) $x(x+1)-x(2x+3)$	練 4、 因式分解下列各式： (1) $y^2+2y(y+1)$　(2) $x(5x+2)-x(x-1)$
例 5、 因式分解下列各式： (1) $x(x+1)-2(x+1)$　(2) $x(2x+1)+(2x+1)$	練 5、 因式分解下列各式： (1) $y(y-3)+4(y-3)$　(2) $x(x+4)-(x+4)$
例 6、因式分解 $(x-1)(3x-2)-(x-1)(x+1)$。	練 6、 因式分解 $(x-3)(2x+1)-(2x+1)(3x-4)$。
例 7、因式分解 $(x-1)(x-2)-(1-x)(x+2)$。	練 7、 因式分解 $(2x-3)^2+(1+x)(3-2x)$。
【分組提公因式】 例 8、因式分解 $x^2+ax+bx+ab$。	例 9、因式分解 x^3-3x^2+2x-6。

【動動腦】

在例題 9 中，如果將多項式 x^3-3x^2+2x-6 依下列兩種方法分組，試完成其因式分解。

(1) 分成 x^3+2x 與 $-3x^2-6$ 兩組。

(2) 分成 x^3-6 與 $-3x^2+2x$ 兩組。

練 9、 因式分解 x^3+x^2+2x+2。

例 10、

因式分解 $x^2y-2xy+3x-6$。

練 10、

因式分解 $xy^2+4y-5xy-20$。

重點回顧

1. 因式分解：將一個多項式寫成兩個或兩個以上多項式的乘積，稱為因式分解。

2. 提公因式：多項式 $ab+ac$ 兩項含有公因式 a，所以 $ab+ac=a(b+c)$。

3. 分組提公因式：多項式 $ac+ad+bc+bd$ 可以用分組提公因式的方法因式分解為 $(a+b)(c+d)$。

3-1 自我評量

1. 下列哪些是 x^3-2x^2-5x+6 的因式？

(A) $x+1$　(B) $x-1$　(C) $x-2$　(D) $x-3$

2. 因式分解下列各式：

(1) $4x^2-7x$　(2) $(2x-3)-(2x-3)^2$

(3) $(x+1)(x-2)-(x+1)(3x-5)$　(4) $2x^3-5x^2+2x-5$

(5) $6x^2y+10xy+9x+15$　(6) $2x^3-3x^2+4x-6$

(7) $(3x-5)^2-4x(5-3x)$

3-2 利用乘法公式因式分解

【平方差公式：　　　　　　　　　　】 利用平方差公式因式分解下列各式： 例 1、(1) x^2-4　　(2) x^2-1	**練 1-1**、 利用平方差公式因式分解下列各式： (1) $4x^2-25$　　(2) x^2-9y^2 **練 1-2**、 利用平方差公式因式分解下列各式： (1) x^2-36　　(2) $9x^2-16y^2$
例 2、 因式分解下列各式： (1) $(x+3)^2-17^2$　　(2) $(2x+1)^2-(x+3)^2$	練 2、 利用平方差公式因式分解下列各式： (1) $x^2-(y+2)^2$　　(2) $(x+1)^2-(y-3)^2$
【和平方公式：　　　　　　　　　　】 例 3、因式分解 $x^2+8x+16$。 **練 3-1**、因式分解 $9x^2+24x+16$。	利用和的平方公式因式分解下列各式： **練 3-2**、(1) $x^2+10x+25$　　(2) $4x^2+12x+9$ **練 3-3**、(3) $16x^2+8x+1$　　(4) $x^2+4xy+4y^2$
例 4、因式分解 $(x+1)^2+12(x+1)+36$。	練 4、因式分解 $x^2+12x(y-2)+36(y-2)^2$。
【差平方公式：　　　　　　　　　　】 例 5、因式分解 $x^2-24x+144$。 **練 5-1**、因式分解 $4x^2-12xy+9y^2$。	利用差的平方公式因式分解下列各式： **練 5-2**、(1) $x^2-12x+36$ **練 5-3**、(2) $9x^2-30xy+25y^2$

例 6、因式分解下列各式： (1) $4x^3-9xy^2$　　(2) $x^2(y+1)-16(y+1)$	練 6、因式分解 $x^2(y-5)-4y^2(y-5)$。
例 7、因式分解 x^4-1。	練 7、因式分解 a^8-1
例 8、 因式分解下列各式： (1) $x^2-10x+25-xy+5y$　　(2) $x^2-6x+9-4y^2$	練 8、 因式分解下列各式： (1) x^4-16　　(2) $x^2-4y^2+12y-9$
重點回顧 1. 利用平方差公式因式分解：利用平方差公式可將形如 a^2-b^2 的多項式因式分解為 $(a+b)(a-b)$ 的形式。 2. 利用和的平方公式因式分解：利用和的平方公式可將形如 $a^2+2ab+b^2$ 的多項式因式分解為 $(a+b)^2$ 的形式。 3. 利用差的平方公式因式分解：利用差的平方公式可將形如 $a^2-2ab+b^2$ 的多項式因式分解為 $(a-b)^2$ 的形式。	**3-2** 自我評量 因式分解下列各式： (1) x^2-196　　(2) $36x^2-25$
(3) $4x^2+24x+36$　　(4) $x^2-18x+81$	(5) $4x^2-36x+81$　　(6) $(x-1)^2+24(x-1)+144$
(7) $(x+2)^2-(y-1)^2$　　(8) $x^2+6x+9-16y^2$	(9) x^8-256

3-3 十字交乘法

(一)方法緣由：將下列題目作「直式乘積展開」，請觀察乘積展開後的「結果」與題目「係數」的關係。

1. (x+2)(x+4)=	2. (x-7)(x+3)=	3. (x+a)(x+b)=

（二）利用十字交乘法作因式分解

1. x^2 項的係數「是 1」

例 **1.** $x^2+8x+7=$	例 **2.** $x^2+4x+4=$	例 **3.** $x^2-7x+6=$
練 **1.** $x^2+9x+18=$	練 **2.** $x^2+12x+20=$	練 **3.** $x^2-16x+15=$
例 **4.** $x^2-8x+12=$	例 **5.** $x^2+19x-20=$	例 **6.** $x^2+4x-12=$
練 **4.** $x^2-3x+2=$	練 **5.** $x^2+3x-10=$	練 **6.** $x^2+2x-15=$
例 **7.** $x^2-13x-30=$	例 **8.** $x^2-4x-60=$	例 **9.** $x^2+11x+24=$
練 **7.** $x^2-x-2=$	練 **8.** $x^2-21x-100=$	練 **9.** $x^2-3x-40=$

2. x^2 項的係數「不是 1」的十字交乘法

方法緣由：將下列題目作「直式乘積展開」，請觀察乘積展開後的「結果」與題目「係數」的關係。

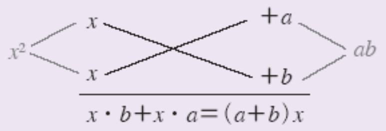
1. $(3x+2)(5x+4)=$	2. $(4x-7)(2x+3)=$	3. $(ax+b)(cx+d)=$
例 **10.** $2x^2+7x+3=$	例 **11.** $9x^2+18x+8=$	例 **12.** $5x^2+16x+12=$
練 **10.** $2x^2+9x+4=$	練 **11.** $10x^2+19x+6=$	練 **12.** $6x^2+23x+15=$
例 **13.** $12x^2-29x+15=$	例 **14.** $5x^2+7x-6=$	例 **15.** $15x^2-x-2=$
練 **13-1.** $39x^2-38x+8=$	練 **14-1.** $2x^2+5x-3=$	練 **15-1.** $5x^2-8x-13=$
練 **13-2.** $60x^2-65x+15=$	練 **14-2.** $11x^2+4x-7=$	練 **15-2.** $3x^2-x-2=$
練 **13-3.** $12x^2-50x+8=$	練 **14-3.** $21x+19x-22=$	練 **15-3.** $3x^2-4x-7=$

3.十字交乘法的變裝

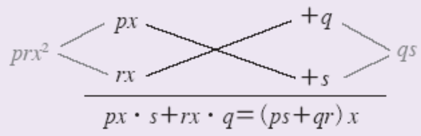
例 **16.** $-3x^2+4x-1=$	例 **17.** $x^2-9=$	例 **18.** $(x+1)^2+9(x+1)+8=$
練 **16-1.** $-2x^2+11x-5=$	練 **17-1.** $9x^2-16=$	練 **18-1.** $(x-3)^2-5(x-3)-24=$
練 **16-2.** $-6x^2+4x+2=$	練 **17-2.** $4a^2-25b^2=$	練 **18-2.** $3(x+2)^2-5(x+2)+2=$
例 **19.** $x^3+2x^2-8x=$	例 **20.** $2x^2+5xy-3y^2=$	例 **21.** $7(x-1)^2+4(x-1)(y+2)-20(y+2)^2=$
練 **19.** $2x^3y-x^2y-6xy=$	練 **20.** $6x^2-11xa+4a^2=$	練 **21.** $2(3x+1)^2-3(3x+1)(y+2)+(y-2)^2=$
例 **22.** $(a+b)^2-4(a+b)-32=$	例 **23.** $2(x-y)^2-5(y-x)-12=$	例 **24.** $(a+b)^2-5(a^2-b^2)+4(a-b)=$
練 **22.** $(x+y)^2+11(x+y)+24=$	練 **23.** $2(a-b)^2+9(a-b)+4=$	練 **24.** $3(x-y)^2+4(x^2-y^2)-7(x+y)=$
例 **25.** $x^4-5x^2+4=$	例 **26.** $5x^3y-25x^2y^2+30xy^3=$	例 **27.** $21+14(x+y)-7(x+y)^2=$
練 **25.** $3y^4+4y^2-4=$	練 **26.** $15a^3b+a^2b^2-2ab^3=$	練 **27.** $acx^2+(ad+bc)x+bd=$

重點回顧

1. $x^2+(a+b)x+ab$ 可用十字交乘法因式分解為 $(x+a)(x+b)$。



2. $prx^2+(ps+qr)x+qs$ 可用十字交乘法因式分解為 $(px+q)(rx+s)$。



3-3 自我評量

利用十字交乘法因式分解下列各式：

(1) $x^2+7x+12$

(2) $x^2+8x+12$

(3) x^2-8x+7

(4) x^2-6x+9

(5) $x^2-15x+36$

(6) $x^2-5x-36$

(7) $-2x^2-13x+24$

(8) $3x^2-19x+28$

(9) $5x^2+17x-12$

(10) $4x^2-3x-10$

(11) $5x^2-6xy-8y^2$

(12) $3(x-1)^2+7(x-1)+4$