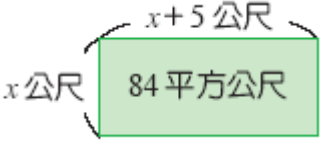
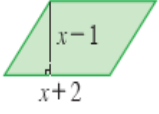


4-1 因式分解法解一元二次方程式

| | |
|--|---|
| <p>* 一元二次方程式及其解</p> <p>例 1：如圖，有一塊長與寬分別為 $x+5$ 公尺和 x 公尺的長方形菜圃，面積為 84 平方公尺，則由長方形的面積公式可得到等式_____。</p>  <p>只含有一種未知數 x，且未知數的最高次數是 2 的等式，如果可以整理成 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的形式，我們稱為一元二次方程式。</p> <p>※</p> | <p>練 1、</p> <p>請依下列敘述列出一元二次方程式：</p> <p>(1) 已知 $2x$ 與 $x+1$ 兩數的乘積為 40，可列得一元二次方程式：_____。</p> <p>(2) 如右圖，平行四邊形底邊的長為 $x+2$，高為 $x-1$，若面積為 18，則依平行四邊形面積公式可列得一元二次方程式：_____。</p>  |
| <p>例 2、</p> <p>判斷 0、1、2、3 是否為方程式 $x^2-3x+2=0$ 的解？</p> | <p>練 2、</p> <p>下列哪些敘述是正確的？</p> <p>(A) 1 是 $x^2-3x+4=0$ 的解 (B) -2 是 $x^2+12x+20=0$ 的解</p> <p>(C) 3 是 $(x-2)(x+3)=1$ 的解 (D) 5 是 $(x-4)(x+3)=0$ 的解</p> <p>(E) 4 是 $(x-4)(x+3)=0$ 的解 (F) -3 是 $(x-4)(x+3)=0$ 的解</p> |
| <p>※「如果 $A \cdot B=0$，則 A、B 兩數中至少有一數為 0」</p> <p>$A \cdot B = 0$ 則 $A = 0$ 或 $B = 0$</p> <p>$(x-4)(x+3)=0$ 則 $x-4=0$ 或 $x+3=0$</p> <p>$x=4$ 或 $x=-3$</p> <p>因為任何 $x \neq 4$ 且 $x \neq -3$ 的值均無法使 $(x-4)(x+3)$ 的值為 0，所以只有 4 及 -3 是一元二次方程式 $(x-4)(x+3)=0$ 的解。</p> | |
| <p>例 3、求下列方程式的解：</p> <p>(1) $(x-3)(x+7)=0$ (2) $(2x-3)(5x+8)=0$</p> | <p>練 3、</p> <p>求下列一元二次方程式的解：</p> <p>(1) $(x+2)(x-3)=0$ (2) $(3x-2)(2x+5)=0$</p> |
| <p>例 4、(提公因式)</p> <p>解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $2x^2-5x=0$ (2) $x^2=3x$</p> | <p>練 4、(提公因式)</p> <p>解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $6x^2+2x=0$ (2) $x^2=-2x$</p> |
| <p>如果一元二次方程式缺常數項 (即常數項為 0)，我們可以利用提出公因式的方法來求解。因為必可提出公因式 x，所以此類方程式必有一個解為 0。</p> | |

| | |
|--|--|
| <p>例 5、(提公因式) 解一元二次方程式 $x^2 + 5x = 0$</p> | <p>練 5、(提公因式) 解一元二次方程式 $2x^2 - 7x = 0$</p> |
| <p>例 6、(提公因式) 解一元二次方程式 $5x(3x+1) = 2(3x+1)$。</p> | <p>練 6、(提公因式) 解下列一元二次方程式： (1) $x(x+3) - 4(x+3) = 0$ (2) $(x-4)(5x-2) = -2(5x-2)$</p> |
| <p>如果解例題 6 時，一開始就將等號兩邊同除以 $3x+1$，最後求得的解會與上面的答案相同嗎？為什麼？</p> <p>【動動腦】</p> | |
| <p>例 7、(平方差公式) 解下列一元二次方程式： (1) $x^2 - 16 = 0$ (2) $(2x+1)^2 = 19^2$</p> | <p>練 7、(平方差公式) 解下列一元二次方程式： (1) $x^2 - 1 = 0$ (2) $17^2 = (3-2x)^2$</p> |
| <p>例 8、(十字交乘法) 解下列一元二次方程式： (1) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (2) $3x^2 + 11x + 6 = 0$</p> | <p>練 8、(十字交乘法) 解下列一元二次方程式： (1) $x^2 + 4x + 4 = 0$ (2) $5x^2 + 3x - 14 = 0$</p> |

| | |
|---|---|
| <p>例 9、(十字交乘法) 解下列一元二次方程式</p> <p>(1) $x^2 + 8x + 15 = 0$ (2) $2x^2 + 3x - 5 = 0$</p> | <p>練 9、(十字交乘法) 解下列一元二次方程式</p> <p>(1) $x^2 + 4x - 12 = 0$ (2) $2x^2 - 11x + 9 = 0$</p> |
| <p>例 10、 解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $2x^2 + 7x = -6$ (2) $(x+2)(x-4) = 7$</p> | <p>練 10、 解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $3x^2 - 5 = 2x$ (2) $(x+2)(x-1) = 10$</p> |
| <p>例 11、 解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} = 0$ (2) $8x^2 - 24x + 16 = 0$</p> | <p>練 11、 解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $x^2 + \frac{5}{3}x - 4 = 0$ (2) $7x^2 - 7x - 42 = 0$</p> |
| <p>例 12、 解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $(x-2)^2 + 3(x-2) = 0$ (2) $(2x+3)^2 = (x-2)^2$</p> | <p>練 12、 解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $(x+5)^2 - (x+5) = 0$ (2) $(3x-2)^2 = (x-2)^2$</p> |

| | |
|--|---|
| <p>【重點回顧】</p> <p>1. 一元二次方程式：可以整理成 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的形式，只含有一種未知數 x，且未知數最高次數是 2 的等式，稱為一元二次方程式。</p> <p>2. 因式分解法解一元二次方程式：形如 $ax^2+bx+c=0$ 的方程式，若等號左邊的二次式 ax^2+bx+c 可以因式分解成兩個一次式的乘積，則可以運用「如果 $A \cdot B=0$，則 A、B 兩數中至少有一數為 0」的性質來求解。</p> | <p>4-1 自我評量</p> <p>1. 下列哪些敘述是正確的？</p> <p>(A) 1 是 $3x^2-5x-4=0$ 的解 (B) -2 是 $x^2-3x-10=0$ 的解</p> <p>(C) 3 是 $(x-3)(x+2)=1$ 的解 (D) $-\frac{2}{3}$ 是 $(x+1)(3x+2)=0$ 的解</p> |
| <p>2. 解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $x^2+7x=0$</p> | <p>(2) $4x(5x-2)=3(5x-2)$</p> |
| <p>(3) $(x+2)^2=4x^2$</p> | <p>(4) $x^2-8x+16=0$</p> |
| <p>(5) $2x^2-x-6=0$</p> | <p>(6) $12x^2-76x+112=0$</p> |
| <p>(7) $(x+1)(x-5)=7$</p> | <p>(8) $x^2+\frac{5}{12}x-\frac{1}{4}=0$</p> |
| <p>(9) $6x^2+13x-8=0$</p> | <p>(10) $1.5x^2-0.5x=2$</p> |
| <p>(11) $(2x+3)(x-1)=(x-1)^2$</p> | <p>(12) $(2x+3)(2x-3)=35x$</p> |

4-2 配方法解一元二次方程式

沒有知識的人總愛議論別人的無知，而知識豐富的人卻時時發現自己的無知。——笛卡兒 (René Descartes, 1596-1650)

| | |
|--|---|
| <p>例 1：【平方根】</p> <p>解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $x^2=9$ (2) $(x-5)^2=9$ (3) $x^2=-9$</p> | <p>練 1：【平方根】</p> <p>解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $x^2=25$ (2) $(2x-5)^2=49$</p> <p>(3) $x^2+4=0$</p> |
| <p>例 2：【平方根】</p> <p>解下列一元二次方程式：</p> <p>(1) $(x-5)^2=7$ (2) $(3x-1)^2=8$</p> | <p>練 2、</p> <p>1. 請將例題 2 中的兩根代入原方程式中檢驗。</p> <p>2. 解下列各方程式，並將求得的解代回原方程式檢驗：</p> <p>(1) $(x+3)^2=5$</p> <p>(2) $(2x-7)^2-4=8$</p> |
| <p>例 3：【配方】</p> <p>分別將適當的數填入□中，使該式子可以配成一個完全平方式，並將它寫成完全平方的形式。</p> <p>(1) $x^2+8x+\square$ (2) $x^2-5x+\square$ (3) $x^2-\frac{4}{3}x+\square$</p> | <p>練 3-1、</p> <p>在□中填入適當的數，使得下列各式可以配成完全平方式。</p> <p>(1) $x^2-12x+\square$ (2) $x^2+9x+\square$ (3) $x^2+\frac{1}{4}x+\square$</p> |
| <p>$x^2+mx+(\frac{m}{2})^2=(x+\frac{m}{2})^2$</p> <p>$x^2-mx+(\frac{m}{2})^2=(x-\frac{m}{2})^2$</p> <p>【結論】：</p> | <p>練 3-2、</p> <p>在空格中填入適當的數，使得下列各式可以配成完全平方式。</p> <p>(1) $x^2-16x+\underline{\hspace{2cm}}=(x-\underline{\hspace{2cm}})^2$</p> <p>(2) $x^2+7x+\underline{\hspace{2cm}}=(x+\underline{\hspace{2cm}})^2$</p> <p>(3) $x^2-\frac{2}{5}x+\underline{\hspace{2cm}}=(x-\underline{\hspace{2cm}})^2$</p> |

※ 配方法解一元二次方程式之步驟：

(1) 解一元二次方程式 $x^2 - 4x + 23 = 0$

(2) 解一元二次方程式 $2x^2 - 12x + 37 = 0$

例 4、(配方法)

解下列一元二次方程式：

(1) $x^2 - 6x - 3 = 0$

(2) $x^2 + 8x + 3 = 0$

練 4、(配方法)

解下列一元二次方程式：

(1) $x^2 + 4x + 1 = 0$

(2) $x^2 - 12x + 5 = 0$

(3) $x^2 + 8x - 3 = 0$

(4) $x^2 - 2x - 7 = 0$

像例題 4 這種先將 $x^2 - 6x - 3 = 0$ 整理成 $(x - 3)^2 = 12$ ，再利用平方根的觀念來求解的過程，稱為**配方法**。

例 5、

解下列一元二次方程式：

(1) $2x^2 + 5x + 1 = 0$

(2) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$

練 5、

解下列一元二次方程式：

(1) $2x^2 - 8x - 3 = 0$

(2) $3x^2 - 6x + 2 = 0$

(3) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

(4) $-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{1}{3}$

例 6、

解一元二次方程式 $x^2 - 2x - 899 = 0$ 。

練 6、

解一元二次方程式 $x^2 + 6x - 391 = 0$

例 7、

解一元二次方程式 $x^2 - 2x + 6 = 0$ 。

練 7、

解下列一元二次方程式：

(1) $x^2 + 4x - 396 = 0$

(2) $x^2 + 25 = -6x$

| | |
|---|---|
| <p>例 8、 若方程式 $x^2-12x+p=0$ 可配方成 $(x-6)^2=4$ 的形式，則 p 的值是多少？</p> | <p>練 8、 若方程式 $x^2-8x+p=0$ 可配方成 $(x-4)^2=1$ 的形式，則 p 的值是多少？</p> |
| <p>【重點回顧】</p> <p>1. 形如 $(ax+b)^2=c$ 的一元二次方程式 (其中 $c \geq 0$)，可利用平方根的概念來求解。</p> <p>2. 形如 x^2+mx 的式子加上 $(\frac{m}{2})^2$ 後，可配成完全平方式 $(x+\frac{m}{2})^2$。 形如 x^2-mx 的式子加上 $(\frac{m}{2})^2$ 後，可配成完全平方式 $(x-\frac{m}{2})^2$。</p> <p>3. 配方法：利用配成完全平方式的方法，將一元二次方程式變成 $(x+a)^2=b$ 的形式，再利用平方根的概念來求解的過程，稱為配方法。</p> | |
| <p>4-2 自我評量</p> <p>1. 求下列一元二次方程式的解：</p> <p>(1) $(x+2)^2=16$</p> | <p>(2) $(x+4)^2=17$</p> |
| <p>(3) $9(x-2)^2=49$</p> | <p>(4) $(x+3)^2-5=0$</p> |
| <p>(5) $(x+5)^2+4=0$</p> | <p>(6) $(2x+6)^2=8$</p> |

2.用配方法解下列一元二次方程式：

(1) $x^2+4x-3=0$

(2) $3x^2-24x=5$

(3) $-x^2+4=5x$

(4) $x^2+6x+10=0$

(5) $3x^2+5x+1=0$

(6) $2x^2+8x-14=0$

4-3 公式解與應用問題

※ 一元二次方程式的公式解

解一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$

※ 一元二次方程式根與係數的關係：

若一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根分別為 A 和 B ，

則 $A + B =$ _____， $A \cdot B =$ _____。(以 a 、 b 、 c 表示)

例 0-1：若一元二次方程式 x^2 的係數為 1，兩根分別為 3 和 4，求此一元二次方程式。

例 0-2：若一元二次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ 的兩根分別為 -6 和 7，求此一元二次方程式。

例 1：

利用公式解，求一元二次方程式 $x^2 + 3x - 28 = 0$ 的解。

練 1、

利用公式解，求 $x^2 + 7x + 3 = 0$ 的解。

| | |
|--|--|
| <p>例 6-1、利用配方法</p> <p>解一元二次方程式 $x^2+6x-391=0$。</p> | <p>例 6-2、利用公式解</p> <p>解一元二次方程式 $x^2+6x-391=0$。</p> |
| <p>例題 6 中，你喜歡用哪種方法？為什麼？</p> | |
| <p>練 6-1、</p> <p>利用配方法，求 $x^2+10x-200=0$ 的解。</p> | <p>練 6-2、</p> <p>利用公式解，求 $3x^2+21x+5=0$ 的解。</p> |
| <p>例 7、</p> <p>解一元二次方程式 $x^2-6x=0$。</p> | <p>練 7、</p> <p>下列各一元二次方程式，請分別挑一個你認為最好的方法來求解。</p> <p>(1) $x^2+4x-957=0$</p> |
| <p>(2) $3x^2-6x=0$</p> | <p>(3) $17x^2-18x+1=0$</p> |

| | |
|---|--|
| (4) $2x^2 - x - 2 = 0$ | (5) $x^2 - 3x + 3 = 0$ |
| (6) $(3x - 2)^2 = 2$ | |
| <p>例 8、</p> <p>若一元二次方程式 $x^2 + ax + 9 = 0$ 有重根，則 a 的值是多少？</p> | <p>練 8、</p> <p>若一元二次方程式 $x^2 + (a + 1)x + 16 = 0$ 有重根，則 a 的值是多少？</p> |
| <p>例 9、(應用問題)</p> <p>有一長方形，長為 $3x - 5$ 公分，寬為 $x + 2$ 公分，面積為 42 平方公分，試求其長與寬。</p> | <p>練 9、</p> <p>(1) 已知一梯形的面積為 88 平方公分，且上底為 7 公分，高比下底長 2 公分，求此梯形的下底及高。</p> <p>(2) 有一三角形的底是 $x + 2$ 公分，高是 $5x - 8$ 公分，且其面積是 4 平方公分，則底是多少公分？</p> |

例 10、

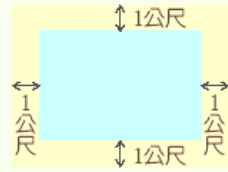
某水果商買進水梨一箱，如果每 x 個裝一盒時，恰可裝滿 $\frac{3}{2}x$ 盒；如果每 $x+1$ 個裝一盒時，可裝滿 $x+2$ 盒還多出 6 個，請問水果商買進幾個水梨？

練 10、

某雜貨店老闆買進雞蛋一箱，每 x 個裝一盒，恰可裝滿 x 盒，若賣掉 2 盒後，還剩雞蛋 120 個，請問雜貨店老闆買進幾個雞蛋？

例 11、

老趙有一塊長方形土地，已知長比寬多 2 公尺，他在土地的中間挖了一個長方形的水池，水池四周剩餘的土地均為 1 公尺寬（如右圖）。若水池的面積與剩餘土地的面積相等，請問原長方形土地的長與寬各是多少公尺？



練 11、

如右圖，在長 24 公尺、寬 12 公尺的長方形草地內部開闢一條等寬的十字形道路，已知道路與草地的長寬平行，若剩下的草地面積為 189 平方公尺，則十字形道路的寬應是多少公尺？



例 12

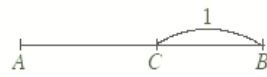
翰翰旅行社招攬墾丁三天兩夜旅遊，預定人數為 30 人，每人收費 5000 元，但人數若超過 30 人，每增加 1 人，則每人可減收 100 元。已知旅行社共收到 160000 元，請問共有多少人參加？

練 12、

某社團辦活動預定人數為 20 人，每人收費 100 元，但人數若少於 20 人，每減少 1 人，則每人要加收 10 元。已知該社團共收到 2240 元，請問共有多少人參加？

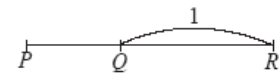
例 13、

如右圖， C 點在 \overline{AB} 上，且 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 三線段的長度滿足 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{BC}$ 的比例關係。若知 \overline{BC} 的長度為 1，求 \overline{AC} 、 \overline{BC} 兩線段長度的比值。



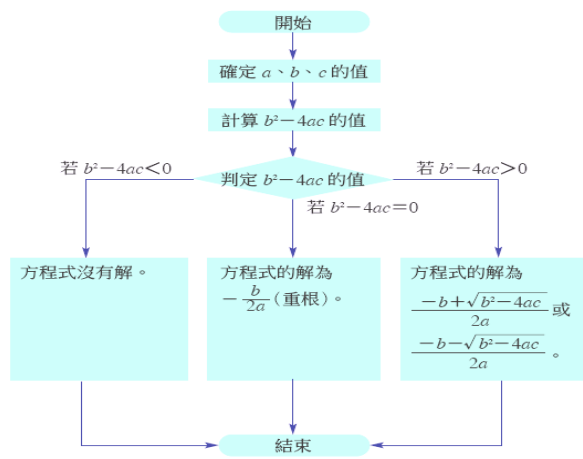
練 13、

如右圖， Q 點在 \overline{PR} 上，且 \overline{PQ} 、 \overline{QR} 、 \overline{PR} 三線段的長度滿足 $\overline{PQ} : \overline{QR} = \overline{QR} : \overline{PR}$ 的比例關係。若知 \overline{QR} 的長度為 1，求 \overline{PQ} 、 \overline{QR} 兩線段長度的比值。



【重點回顧】

利用公式解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的過程：

**4-3 自我評量**

1. 求下列一元二次方程式的解：

(1) $x^2-7x+9=0$

(2) $2x^2+5x+1=0$

(3) $-x^2+4x+12=0$

(4) $4x^2+9=12x$

(5) $6x^2-7x+3=0$

(6) $2(x-1)(x-3)=5x$

2. 若將一正方形的一邊減少 3 公分，另一邊變成原來的 2 倍，則所得新長方形的面積比原正方形的面積多 7 平方公分，求原正方形的邊長是多少公分？

3. 在圖一中，甲是一個邊長為 2 公分的正方形，乙是一個長方形，且甲、乙兩圖的面積相等。如果將甲疊在乙上面，使它們的兩個鄰邊對齊（如圖二所示）時，結果發現乙露出的部分為正方形丙，請問正方形丙的邊長是多少公分？

